

## RESEARCH OUTPUTS / RÉSULTATS DE RECHERCHE

### Équations Différentielles Ordinaires, BAC2 mathématique

Carletti, Timoteo; D'Hoedt, Sandrine

*Publication date:*  
2007

*Document Version*  
Première version, également connu sous le nom de pré-print

[Link to publication](#)

*Citation for published version (HARVARD):*  
Carletti, T & D'Hoedt, S 2007, *Équations Différentielles Ordinaires, BAC2 mathématique..*

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Table des matières

<i>Avant-propos.</i>	v
Chapitre I. <i>Introduction et premières définitions.</i>	1
1. Datation avec $C^{14}$	1
2. Capital et intérêt	2
3. Recherche des Primitives	4
4. Chute des corps à la surface de la terre	4
5. Vers une définition	5
6. Conclusions	7
Chapitre II. <i>Le problème de Cauchy.</i>	11
1. Existence et Unicité du PdC	11
2. Première démonstration du Théorème d'existence et unicité	13
2.1. Théorème des Contractions	13
2.2. Suite et Fin démonstration Théorème existence et unicité	15
3. Deuxième démonstration du Théorème d'existence et unicité	16
3.1. Une majoration	17
3.2. Suite et fin	17
4. Troisième démonstration du Théorème d'existence et unicité : cas analytique	18
4.1. Recherche de la solution explicite pour (II.4.6).	21
5. Régularité des solutions du PdC	21
6. Conclusions	22
Chapitre III. <i>Prolongement des solutions.</i>	23
1. Définitions et Théorème d'existence	23
2. Construction du prolongement	25
Chapitre IV. <i>Dépendance continue par rapport aux paramètres.</i>	31
1. Dépendance Continue par rapport aux paramètres	31
1.1. Un Lemme technique [Théorème de la comparaison]	34
2. Dépendance continue par rapport aux données initiales	35
Chapitre V. <i>Quelques solutions explicites.</i>	39
1. Introduction	39
2. Variations des constantes : cas linéaire, dimension 1.	40
3. Variables Séparables.	40
3.1. Attentions : tournants dangereux !	41
3.2. Cas à reconduire à Variables Séparables.	42
3.3. Équations Homogènes.	43

4. Équation de Bernoulli	43
5. Méthode de la différentielle exacte et Intégrales premières	45
6. Oscillateur harmonique	46
Chapitre VI. <i>Équations Différentielles Ordinaires Linéaires.</i>	49
1. EDO Linéaires : préliminaires.	49
2. EDO linéaires à coefficients constants homogènes	52
2.1. Rappel d'algèbre	52
2.2. Opérateur de dérivation	52
2.3. Déterminant de Wronski	55
2.4. Indépendance linéaire de fonctions	59
2.5. Conclusions	60
3. EDO linéaires à coefficients constants non homogènes	61
3.1. Cas 1 : $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})$	62
3.2. Cas 2 : $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})e^{\beta t}$	62
3.3. Cas 3 : $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t})e^{\beta t} (\mathbf{a} \cos(\gamma t) + \mathbf{b} \sin(\gamma t))$	63
3.4. $f(t)$ combinaisons de précédents	64
4. EDO linéaires	64
4.1. Méthode de la variation des constantes	64
5. Oscillateur linéaire (d'après Anne Lemaître, cours mécanique)	67
5.1. Oscillateur harmonique : $h = 0$	67
5.2. Oscillateur faiblement amorti : $h^2 < \omega^2$	68
5.3. Oscillateur fortement amorti : $h^2 > \omega^2$	68
5.4. Cas critique : $h^2 = \omega^2$	69
5.5. Oscillateur forcé : phénomène de résonance	69
5.6. Battements	70
Chapitre VII. <i>Points d'équilibre et Dynamique locale.</i>	73
1. Introduction	73
2. Points singuliers pour EDO linéaire à coefficients constants homogènes dans $\mathbb{R}^2$	73
2.1. Valeurs propres réelles et distinctes.	74
2.1.1. <b>Nœuds : Stables et Instables</b>	75
2.1.2. <b>Point selle</b>	76
2.2. Valeurs propres complexes.	77
2.2.1. <b>Foyer Stable et Instable</b>	78
2.2.2. <b>Centre</b>	80
2.3. Cas dégénéré : valeurs propres égales	81
2.3.1. <b>Nœud dégénéré : Cas I</b>	81
2.3.2. <b>Nœud dégénéré : Cas II</b>	81
2.4. Valeurs propres nulles	82
2.4.1. $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$	82
2.4.2. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	83
Chapitre VIII. <i>Applications : dynamique des populations.</i>	85
1. Modèles de croissance de populations	85
2. Un modèle de croissance d'une population	85
3. Un modèle avec deux espèce en compétition	87
3.1. Analyse du point $(x, y) = (0, 0)$ .	89

Chapitre	p. iii
3.2. Analyse du point $(x, y) = (1, 0)$ .	89
3.3. Analyse du point $(x, y) = (0, 2)$ .	90
3.4. Analyse du point $(x, y) = (1/2, 1/2)$ .	91
3.5. Dynamique globale.	92
3.6. Conclusion	93
3.7. Retour au système générale (VIII.3.1)	94
4. Modèle Proie–Prédateur	96
4.1. Étude de l’origine	96
4.2. Étude du point $(x, y) = (\frac{a}{b}, 0)$	97
4.3. Étude du point $(x, y) = \left[ \frac{c}{\beta}, \frac{b}{\alpha} \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \right]$	98
4.4. Portrait de phase globale	102
Chapitre IX. <i>Bibliographie.</i>	105
Annexe A. <i>“Tout ce que vous auriez toujours voulu savoir mais que vous n’avez jamais osé demander concernant l’analyse”</i>	107
1. Le Principe d’induction	107
2. Théorème de la Moyenne ou de Lagrange.	108
3. Théorème de Schwartz ou de l’inversion de l’ordre de dérivation.	108
4. Normes et Distances.	108
5. Réduction de l’équation d’une conique en forme normale	110



## ***Avant-propos.***

Ces notes ont été conçues initialement pour “aider” les étudiants dans la préparation du cours Équations Différentielles Ordinaire BAC2 et LIC1 année 2005–2006. L’argument à traiter était sûrement très vaste, même trop pour un cours de 30h, j’ai dû donc faire des choix portant sur le matériel à présenter, compte tenu aussi du “rôle” et de la “position” de ce cours parmi les cours dispensés aux Département de Mathématique FUNDP. J’ai cependant inclus dans ces notes, non seulement tout le matériel traité en cours, mais aussi des arguments que les étudiants intéressés pourront développer par eux-mêmes. Le but des ces notes étant de *compléter la préparation* des étudiants avec les notes prises en cours par-eux mêmes, je conseille vivement de chercher d’autres sources “classiques” dont un certain nombre est proposé en Bibliographie.

Je tiens à remercier Sandrine d’Hoedt pour son aide dans la préparation des exercices pour les TD, mais aussi pour tous les conseils donnés pour améliorer la première version de ces notes, y compris la correction de fautes.

Les moyens informatiques offerts par le *webcampus*, permettent d’avoir un syllabus en évolution–amélioration permanente, et non figé d’année en année. Pour cela toute suggestion, conseil, idée pour corriger–modifier–remodeler ces notes sera la bienvenue.

Je termine cet avant-propos avec une remarque concernant le numérotage des équations, sections, sous-section etc. Les équations sont numérotées consécutivement à l’intérieur de chaque section et leur nombre contient toujours le nombre du Chapitre, c’est-à-dire équation (I.2.3) signifie la troisième équation de la seconde section du premier Chapitre. Définitions, Exemples, Remarques, Théorèmes, Corollaires, Lemmes et tout autre objet seront numérotés consécutivement à l’intérieur de chaque section, leur nombre ne contient pas le nombre du Chapitre, mais seulement le nombre de la Section. On aura donc Définition 3.1, le premier objet de la section 3, et qui sera suivie par Remarque 3.2, et cetera.

Les références à objets (autres que équations) contiennent le nombre du Chapitre si elle font référence à un objet contenu dans un Chapitre différent du Chapitre courant. Donc objet I.2.3 signifie le troisième objet de la seconde section du premier Chapitre, si on n’est pas en train de lire le premier Chapitre, autrement le même objet sera indiqué avec 2.3 dans le Chapitre I.

TIMOTEO CARLETTI  
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES FUNDP  
REMPART DE LA VIERGE, 8  
B-5000 NAMUR BELGIQUE  
TIMOTEO.CARLETTI@FUNDP.AC.BE

Namur, Janvier 2006



## CHAPITRE I

### *Introduction et premières définitions.*

Le but de ce Chapitre introductif est de définir, en partant d'un exemple, qu'est-ce qu'une *équation différentielle* (ordinaire) et qu'est-ce que signifie en *déterminer une solution*. On donnera aussi la définition de Problème de Cauchy : recherche de solutions avec données initiales fixées à priori.

On va démarrer avec quelques exemples.

#### 1. Datation avec $C^{14}$

Le *carbone* présent en nature est formé par un mélange de plusieurs isotopes (même nombre de protons et électrons mais différent nombre de neutrons dans son noyau), parmi ceux-ci il y a le *Carbone 14* qui est radioactif : ses neutrons ont un temps de vie fini et leurs nombre décroît dans le temps.

Un arbre prend le carbone de l'atmosphère (sous forme d'anhydride-carbonique  $CO_2$ ) et le lie à sa structure, donc le pourcentage de  $C^{14}$  dans son bois est le même que celui de l'air et donc constant. Si au temps  $t_{coupe}$  on coupe l'arbre il ne fixera plus de carbone, et donc  $C^{14}$  non plus, dans son bois, de plus le pourcentage de  $C^{14}$  va diminuer suivant la loi (que l'on va établir maintenant) :  $N(t) = N(t_{coupe})e^{-\alpha(t-t_{coupe})}$ . En connaissant  $\alpha$ , constante physique, et  $N(t_{coupe})$  (lié à la proportion de  $C^{14}$  sur le total de carbone au moment de la coupe), de la mesure de  $N(t)$  on peut déterminer le temps passé entre la coupe de l'arbre et le moment de la mesure (aujourd'hui) :

$$t_{mesure} - t_{coupe} = -\frac{1}{\alpha} \log \frac{N(t_{mesure})}{N(t_{coupe})},$$

Passons maintenant à la détermination de la loi suivie par le nombre de neutrons contenus dans le noyau d'un atome. Les neutrons sont des particules instables : spontanément ils peuvent se désintégrer en un proton, un électron et un neutrino, en formule,

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \nu.$$

Ce processus est régi par des lois statistiques : la probabilité qu'un neutron se désintègre dans un "petit" intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$  est une constante physique, ici appelée  $\alpha$ . Si on indique par  $N(t)$  le nombre (moyen) de neutrons présents au temps  $t$ , on aura au temps  $t + \Delta t$  un nombre de neutrons donné par :

$$N(t + \Delta t) = N(t) - N(t)\alpha\Delta t,$$

le nombre de neutrons au temps  $t + \Delta t$  est le nombre de neutrons au temps  $t$  duquel on soustrait le nombre de neutrons qui peuvent se désintégrer dans le temps  $\Delta t$ . Si on réarrange les termes et on passe à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$(I.1.1) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} := \dot{N}(t) = -N(t)\alpha,$$



où  $\dot{N}(t) = \frac{dN(t)}{dt}$  (notation de Physiciens) : dérivée de  $N(t)$  par rapport au temps, évaluée à l'instant  $t$ . C'est-à-dire : le taux net de changement du nombre (moyen) de neutrons est proportionnel au nombre de neutrons présents, fois la probabilité de désintégration.

On veut maintenant déterminer le nombre de neutrons à un certain temps  $t_1$ ,  $N(t_1)$  ; pour cela il faudra résoudre l'équation (I.1.1) mais il faudra aussi connaître le nombre de neutrons présents à un certain temps  $t_0$ ,  $N(t_0)$ .

Si pour un certain  $\bar{t} \in [t_0, t_1]$  on a  $N(\bar{t}) = 0$  alors, puisque le nombre de neutron ne peut que diminuer et puisque ce nombre doit être positif, on a forcément  $N(t_1) = 0$ . On peut donc supposer que pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $N(t) > 0$  et diviser dans (I.1.1) par  $N(t)$  :

$$\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = -\alpha ;$$

en utilisant la règle de dérivation de fonction composée et la dérivée de la fonction logarithme on peut reconnaître que :  $\frac{1}{N(t)} \frac{dN(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\log N(t))$ . Si maintenant on intègre (voir section suivante) la relation précédente entre les instants de temps  $t_0$  et  $t_1$ , on a :

$$\log(N(t_1)) - \log(N(t_0)) = -\alpha(t_1 - t_0) ,$$

et donc

$$N(t_1) = N(t_0)e^{-\alpha(t_1 - t_0)} .$$

## 2. Capital et intérêt

Nous allons présenter maintenant un deuxième exemple pour nous diriger vers une définition d'une équation différentielle.

Supposons de déposer dans un banque une somme d'argent initiale,  $u_0$ , à un certain temps  $t_0$ , et supposons que la banque nous offre un taux d'intérêt annuel de  $p\%$ . Nous pouvons assumer que la banque calcule les intérêts dûs à la fin de chaque échéance, qui peut être une année, un mois ou un jour. Dans tout cas à la fin de chaque échéance notre capital est augmenté grâce aux intérêts, donc pendant l'échéance successive les intérêts sont calculés sur un montant d'argent plus important.

Si nous appelons  $u(t_i)$  l'argent présent sur notre compte bancaire au début de la  $i$ -ème échéance alors nous avons :

$$(I.2.1) \quad u(t_{i+1}) = u(t_i) + pu(t_i)\Delta t ,$$

c'est-à-dire au temps  $t_{i+1}$  notre capital sera donné par le capital présent au début de l'échéance précédente, augmenté par les intérêts calculés pendant cette période, étant  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  la durée entre deux échéances successives.

Nous voudrions maintenant savoir répondre à la question suivante : combien d'argent aurons-nous dans un an ? Ou plus en générale dans un temps  $t$  quelconque. Pour faire cela nous allons récrire la relation (I.2.1) de façon différente :

$$(I.2.2) \quad \frac{u(t_{i+1}) - u(t_i)}{\Delta t} = pu(t_i) ,$$

car  $\Delta t \neq 0$ . Ensuite nous allons supposer que la durée des échéances peut être de plus en plus courte, mathématiquement nous allons faire tendre  $\Delta t \rightarrow 0$  pour avoir

un *taux instantané* de croissance. Nous pouvons supposer que la limite  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t_i + \Delta t) - u(t_i)}{\Delta t}$  existe finie, autrement dit que la fonction  $u(t_i)$  soit dérivable pour tout  $t_i$ , alors :

$$(I.2.3) \quad \frac{du}{dt}(t_i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t_i + \Delta t) - u(t_i)}{\Delta t} = pu(t_i),$$

Supposons pour le moment que  $u(t) \neq 0$  pour tout  $t$ , alors en divisant par ce terme nous allons obtenir :

$$\frac{1}{u(t)} \frac{du}{dt} = p,$$

et si nous utilisons l'identité suivante (dérivation de fonction composée) :

$$\frac{d}{dt} \log u(t) = \frac{1}{u(t)} \frac{du}{dt},$$

nous pouvons conclure que :

$$\frac{d}{dt} \log u(t) = p.$$

Pour passer des dérivées aux fonctions il suffit d'intégrer l'équation précédente :

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{ds} \log u(s) ds = \int_{t_0}^t p ds,$$

en utilisant le théorème fondamental du calcul intégrale nous avons :

$$\log u(t) - \log u(t_0) = p(t - t_0),$$

et finalement

$$u(t) = u(t_0)e^{p(t-t_0)}.$$

Nous avons donc trouvée une fonction qui nous permet de savoir combien d'argent nous aurons à un temps  $t$  quelconque, en connaissant la quantité initiale  $u(t_0)$ .

Revenons sur l'hypothèse  $u(t) \neq 0$  pour tout  $t$ . S'il existait un  $\bar{t}$  pour lequel  $u(\bar{t}) = 0$  alors, grâce à l'équation différentielle on aurait aussi  $u(\bar{t})' = 0$ , c'est-à-dire  $u(t)$  constant, et puisque en  $\bar{t}$  la fonction vaut zéro, cette constante sera zéro. On vérifie facilement que la fonction  $u(t) = 0$  pour tout  $t$ , est bien une solution, mais qui sera écartée, car elle n'est pas compatible avec notre condition initiale.

Supposons maintenant de retirer à chaque échéance une quantité d'argent,  $b$ , donc le taux de croissance instantané devient

$$(I.2.4) \quad \dot{u} = pu - b,$$

et nous nous posons toujours la même question : savoir combien d'argent nous aurons à un certain temps  $t$ .

En suivant des idées similaires à celles utilisées précédemment nous récrivons (I.2.4) de la façon suivante :

$$\frac{1}{pu - b} \dot{u} = 1,$$

et donc avec une intégration nous allons déterminer une fonction  $u$  qui satisfait (I.2.4) :

$$u(t) = \frac{b}{p} + \left( u(t_0) - \frac{b}{p} \right) e^{p(t-t_0)}.$$

Il faut distinguer trois cas :

- (1)  $b < pu(t_0)$  : on retire moins d'argent que celui produit par les intérêts, donc le capital augmente ; en fait la fonction  $u(t)$  est toujours positive ;

- (2)  $b > pu(t_0)$  : on retire plus d'argent que celui produit par les intérêts, le capital décroît. La fonction est positive entre  $t_0$  et un certain  $T > t_0$  et ensuite toujours négative, la valeur  $T$  peut être déterminée en imposant la condition  $u(T) = 0$ , qui va nous donner :

$$T = t_0 + \log \frac{b/p}{b/p - u(t_0)}.$$

- (3)  $b = pu(t_0)$  : on retire autant d'argent que celui produit par les intérêts, le capital reste constant, la fonction  $u(t)$  est réduite à une constante :  $u(t) = b/p$  pour tout  $t$ .

### 3. Recherche des Primitives

Dans l'exemple précédent un pas fondamental pour obtenir la solution a été la recherche d'une fonction dont la dérivée était connue (c'était le cas du logarithme), c'est-à-dire une *primitive*. C'est cela une des applications les plus importantes de la théorie des équations différentielles : on se donne une fonction  $f(x)$  et on cherche une deuxième fonction  $F(x)$  telle que :  $F'(x) = f(x)$  (on a ici utilisé la notation "des mathématiciens"<sup>1</sup>,  $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ ). D'après le cours de Calcul si  $f$  est une fonction *continue* dans un intervalle  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  alors la fonction définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi \quad \text{pour tout } x \in (a, b),$$

est continue, sa dérivée est continue dans  $(a, b)$  et vérifie pour tout  $x \in (a, b)$  la relation  $F'(x) = f(x)$ . On remarque qu'on peut rajouter à  $F(x)$  une quelconque constante arbitraire,  $c$ , telle que la fonction  $F_c(x) = F(x) + c$  ait les mêmes propriétés que la fonction  $F$ , notamment sa dérivée vérifie  $F'_c(x) = f(x)$ , pour tout  $x \in (a, b)$ .

### 4. Chute des corps à la surface de la terre

Ça relève de l'expérience quotidienne que, lorsqu'un corps est laissé libre proche de la surface de la terre, il tombe (voir la "pomme de Newton"). Dans cette section nous allons montrer comme les EDO peuvent donner une réponse à la question suivante : après combien de temps un corps lancé sur la vertical avec une vitesse  $v_0$ , tombe à terre ?

Si avec la variable  $x$  nous mesurons les hauteurs à partir de la surface de la, alors la position du corps au temps  $t$  sera donnée par  $x(t)$ . Si la position du corps, mesurée entre deux instants de temps  $t_1 < t_2$ , varie, alors nous pouvons définir la vitesse moyenne comme

$$(I.4.1) \quad \bar{v}_{t_1, t_2} = \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2}.$$

Si les deux mesures de position sont faites pour des temps de plus en plus proche  $\bar{v}_{t_1, t_2}$  tendra vers une valeur limite, la vitesse instantanée au temps  $t_1$  :

$$(I.4.2) \quad v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2},$$

<sup>1</sup>On utilisera souvent le *point* en haut, "′", pour indiquer la dérivée par rapport à la variable indépendante s'il s'agit du temps, par contre le symbole "′" sera préféré dans les autres cas. On pourra aussi utiliser une lettre supérieure ( $k$ ) pour dénoter la dérivée  $k$ -ième.

cette limite n'est rien d'autre que la dérivée de la fonction position par rapport au temps :

$$(I.4.3) \quad v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x(t_1) - x(t_2)}{t_1 - t_2} \equiv \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} \equiv \dot{x}(t_1).$$

De façon similaire une variation de la vitesse implique une accélération non nulle et donc :

$$(I.4.4) \quad a(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{v(t_1) - v(t_2)}{t_1 - t_2} \equiv \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_1} \equiv \dot{v}(t_1) \equiv \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t=t_1} \equiv \ddot{x}(t_1).$$

D'après la mécanique classique (voir Galilée et Newton), tout corps de masse  $m$  proche de la terre est soumis à une force  $-mg$  dirigée vers le centre de la terre, où  $g = 9.8m/s^2$  est une constante universelle. De plus cette force entraîne une variation d'accélération :

$$(I.4.5) \quad ma = F;$$

dans notre cas nous avons donc :

$$(I.4.6) \quad m\ddot{x}(t) = -mg.$$

Pour résoudre la question posée, à savoir combien de temps faut-il avant que le corps tombe par terre, il est évident que nous devons donner aussi l'hauteur de laquelle le corps est lancé et sa vitesse, c'est-à-dire il faut donner *les conditions initiales*. Dans notre cas :

$$(I.4.7) \quad x(0) = h \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

L'intégration de l'équation (I.4.6) est banale :

$$(I.4.8) \quad \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = -gt \quad \text{et ensuite} \quad x(t) - x(0) = \dot{x}(0)t - \frac{g}{2}t^2,$$

Le temps cherché  $\hat{t}$  sera donc solution de :

$$(I.4.9) \quad x(\hat{t}) = 0;$$

cette solution existe toujours, car la solution (I.4.8) représente dans le plan *temps-position* une parabole concave avec sommet d'ordonnée positive. Quelques passages d'algèbre nous fournissent la solution :

$$(I.4.10) \quad \hat{t} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g},$$

observons que des deux solutions de l'équation de deuxième degré (I.4.8) seulement une est physiquement acceptable, l'autre correspond à une évolution du temps contraire à la flèche du temps réel.

## 5. Vers une définition

Les exemples des sections précédentes nous montrent qu'une *équation différentielle* est une *relation fonctionnelle* (c'est-à-dire une équation dont la solution est une fonction et pas un nombre, par exemple) entre une fonction et sa (ses) dérivée(s). Formellement on donne la définition suivante

DÉFINITION 5.1 (équation différentielle ordinaire). Une équation différentielle d'ordre  $n$ , entier positif, est une relation du type :

$$(I.5.1) \quad \mathcal{F} \left( t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t) \right) = 0,$$

entre la variable indépendante  $t$ , la fonction inconnue  $f(t)$  et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre  $n$ , notées par  $f^{(l)}(t)$ ,  $l = 1, \dots, n$ .

Si on peut isoler la dérivée d'ordre plus grand et récrire la relation comme :

$$(I.5.2) \quad f^{(n)}(t) = \mathcal{G} \left( t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t) \right),$$

on parlera de forme normale. On a ici considéré le cas de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , mais de façon similaire on pourra considérer fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ .

L'adjectif ordinaire se réfère au fait que la fonction inconnue ne dépend que de la variable  $t$ ; dans le cas de dépendance de plusieurs variables et des dérivées respectives on aura une équation aux dérivées partielles.

Dans la plupart des cas on considérera des Équations Différentielles Ordinaires (EDO dans la suite) en forme normale pour lesquelles il n'est pas restrictif de les considérer seulement du premier ordre,

REMARQUE 5.2. Supposons d'avoir une EDO d'ordre  $n \geq 2$  (en forme normale) :

$$f^{(n)}(t) = \mathcal{F} \left( t, f(t), f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t) \right),$$

on va introduire la fonction vectorielle <sup>2</sup>  $\mathbf{u}(t) = (u_0(t), \dots, u_{n-1}(t))^T$ , dont les composantes sont les fonctions définies par :

$$u_0(t) = f(t), u_1(t) = f'(t), \dots, u_{n-1}(t) = f^{(n-1)}(t).$$

Notre relation est donc équivalente à l'équation différentielle vectorielle du premier ordre :

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(t, \mathbf{u}(t)) \end{pmatrix} := \mathcal{G}(t, \mathbf{u}(t)),$$

comme on peut aisément vérifier par calcul direct.

Si l'EDO ne dépend pas explicitement de la variable indépendante on parlera d'EDO autonome.

Les exemples des sections précédentes nous permettent de mettre en évidence deux faits fondamentaux. D'après les exemples des paragraphes précédents on remarque que pour connaître le nombre de neutrons/argent/position au temps  $t_1$ , il faut savoir combien de neutrons/argent/position-vitesse on avait à un certain temps  $t_0$  (conditions initiales). Par contre pour résoudre le problème du § 3, on n'a pas eu besoin de cette information ultérieure mais on a introduit une constante arbitraire et on détermine une famille de solutions.

DÉFINITION 5.3 (Solution). On considère la fonction vectorielle  $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = (f_1(t, \mathbf{u}), \dots, f_n(t, \mathbf{u}))^T$  des  $n+1$  variables réelles  $(t, \mathbf{u}) = (t, u_1, \dots, u_n)$ , définie dans l'ouvert  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$  et l'EDO du premier ordre (vectorielle) suivante :

$$(I.5.3) \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}).$$

<sup>2</sup>Les vecteurs seront toujours, sauf avis différent, des vecteurs colonne.

Une fonction  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ , définie dans un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , est une solution de l'EDO (I.5.3) si :

- (1) pour tout  $t \in I$  le point  $(t, \mathbf{y}(t))$  appartient à  $A$  ;
- (2) pour tout  $t \in I$  on a  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ .

Si maintenant on fixe les conditions initiales, on cherche donc parmi toutes les solutions celles qui passent par un point donné, on a :

DÉFINITION 5.4 (Problème de Cauchy et sa forme intégrale). *On considère l'EDO (I.5.3) et soit  $(t_0, \mathbf{u}_0)$  un point dans  $A$ , la recherche d'une solution avec condition initiale  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{u}_0$ , est appelé Problème de Cauchy (PdC dans la suite), en formule :*

$$(I.5.4) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases}$$

Soit la fonction  $\mathbf{f}$  continue dans  $A$  ; une fonction  $\mathbf{y}(t)$  est une solution de (I.5.4) si et seulement si elle est une solution continue de l'équation intégrale :

$$(I.5.5) \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{y}(s)) ds.$$

En fait si  $\mathbf{y}(t)$  est une solution continue de (I.5.5), définie dans un voisinage de  $t_0$ , alors on a  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{u}_0$  et en étant une primitive de  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$  elle est continûment dérivable et  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$ , donc elle est une solution de (I.5.4). Par contre si  $\mathbf{y}(t)$  est une solution continûment dérivable de (I.5.4) définie dans un voisinage de  $t_0$ , en intégrant entre  $t_0$  et  $t$  on obtient (I.5.5).

## 6. Conclusions

Dans ce Chapitre on a introduit le concept d'équation différentielle ordinaire et de Problème de Cauchy, nous avons aussi donné la définition de solution.

Dans le Chapitre II on verra qu'on peut déterminer des conditions, assez faibles, sur  $\mathbf{f}$  suffisantes pour l'existence et l'unicité du PdC. Même si ces résultats sont puissants et généraux "il ne servent pratiquement à rien" si on cherche à déterminer "explicitement" la (les) solution(s) du PdC. On devra donc considérer en détail quelques cas particuliers, mais très importants, où on puisse développer une Théorie aussi pour la recherche d'une solution, Chapitre V.

Dans l'exemple du nombre de neutrons on a résolu un PdC avec une et une seule solution, qui en plus est définie pour tout  $t$  (si on oublie la contrainte sur la positivité du nombre de neutrons). Cela est une situation bien spéciale, on peut très bien exhiber des exemples, aussi simples que les précédents, où il y a plusieurs fonctions qui vérifient le PdC et/ou la solution n'est pas définie pour tout  $t$ .

EXEMPLE 6.1 (Manque d'unicité). *On considère le PdC suivant :*

$$\begin{cases} \dot{u} &= 3u^{2/3} \\ u(0) &= 0. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la fonction  $y_1(t) = t^3$  est une solution, mais aussi la fonction  $y_2(t) = 0$ , comme d'ailleurs toutes les fonctions  $y_{a,b}(t)$  définies par :

$$y_{a,b}(t) = \begin{cases} (t+b)^3 & t < -b \\ 0 & -b \leq t \leq a \\ (t-a)^3 & t > a, \end{cases}$$

avec  $a$  et  $b$  nombres réels positifs.

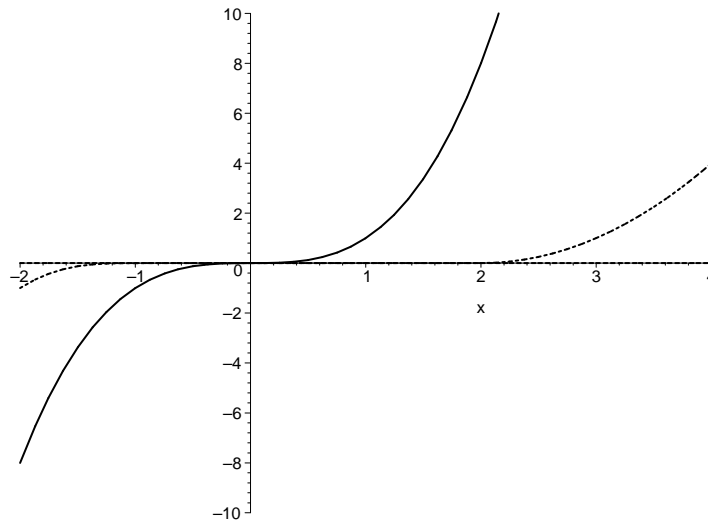


FIG. 1. Manque de Unicité : différentes solutions du PdC ci-dessus,  $y_{2,1}(x)$  en pointillé et  $y_1(x)$  en trait plein.

EXEMPLE 6.2 (Existence locale). On considère le PdC suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} &= -u^2 \\ u(0) &= -1. \end{cases}$$

On vérifie aisément que la fonction  $y(t) = 1/(t-1)$  est une solution, qui est définie seulement pour  $t < 1$ .

Dans les Chapitres II et III on considérera ces problèmes avec plus de détails en montrant sous quelles conditions on pourra avoir une solution unique et définie dans le plus grand intervalle possible.

Dans beaucoup de situations une EDO est le résultat d'un modèle qui doit décrire le comportement d'un certain système réel; il peut arriver que le modèle dépende de certains paramètres ou bien que le modèle ne soit qu'une première approximation du phénomène réel, donc on peut espérer qu'il soit "proche" du système que nous étudions. Une question importante est donc de savoir combien les solutions de l'EDO obtenues avec le modèle sont "proches" du comportement réel et comment

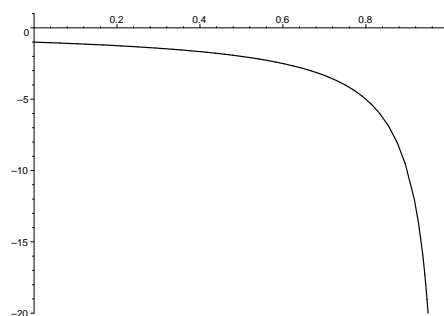


FIG. 2. Solution locale : exemple avec solution qui ne peut pas être prolongée dans aucun intervalle contenant  $[0, 1]$ .

ces solutions varient en changeant les paramètres du modèle. Ces questions seront considérées dans le Chapitre IV.

Le Chapitre VI sera entièrement consacré à l'étude du cas très important des EDO linéaires. Dans le Chapitre VII nous nous concentrerons sur les solutions stationnaires (points d'équilibre) pour des EDO avec un intérêt particulier pour le cas à deux variables. Finalement dans le Chapitre VIII les outils mis au point dans l'avant dernier Chapitre seront appliqués pour étudier des simples dynamiques de populations (prédateur-proie / espèces en compétition).





## CHAPITRE II

### *Le problème de Cauchy.*

Dans ce Chapitre nous allons considérer en détail le Problème de Cauchy (PdC dans la suite) et déterminer des conditions suffisantes pour assurer l'existence d'une solution. Dans beaucoup d'applications (et aussi d'un point de vu théorique) il est très important de démontrer aussi l'unicité de la solution : si les solutions d'un PdC décrivent la position d'un corps à un certain temps on voudrait être sûrs que, pour des conditions initiales données, on trouvera le corps dans un état bien précis à un temps donné.

Les deux résultats principaux que nous verrons sont résumés dans les deux Théorèmes suivants :

**THÉORÈME** (Existence de Peano) *Si  $f(t, u)$ <sup>1</sup> est continue dans un voisinage du point  $(t_0, u_0)$ , alors le Problème de Cauchy admet une solution  $t \mapsto y(t)$  définie dans un voisinage de  $t_0$ .*

et

**THÉORÈME** (Existence et unicité de Picard) *Si  $f(t, u)$  est continue dans un voisinage du point  $(t_0, u_0)$  et vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable (voir Définition 1.1), alors le Problème de Cauchy admet une solution locale unique.*

Même si d'un point de vu logique il serait préférable de considérer d'abord le *problème d'existence* et après le *problème d'unicité* des solutions du PdC, on est amené à inverser l'ordre logique et de résoudre d'abord la deuxième question, en reléguant en Annexe comme matériel complémentaire la question d'existence. Cela pour la "simple raison" que les outils nécessaires pour le Théorème d'existence dépassent les limites de ce cours et le temps à notre disposition.

**REMARQUE** *Dans ce Chapitre il y a trois démonstrations du Théorème de Picard, deux valables pour le cas différentiable et une pour le cas analytique. Cependant il sera suffisant que le lecteur en connaisse la première cfr. § 2, les deux autres cfr. § 3 et § 4 sont laissées comme matériel complémentaire.*

#### 1. Existence et Unicité du PdC

Soit  $f(t, u)$  une fonction des variables réelles  $(t, u)$ , définie dans l'ouvert  $A \subset \mathbb{R}^2$  et soit  $(t_0, u_0)$  un point dans  $A$ . Le résultat principal de cette section est la preuve du Théorème d'existence et unicité dû à Picard. Dans la suite on aura besoin de la définition suivante :

---

<sup>1</sup>Pour alléger les notations on va considérer dans ce Chapitre les cas d'EDO scalaires, c'est-à-dire fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On montrera cependant les modifications nécessaires pour développer une Théorie analogue dans le cas vectoriel.

DÉFINITION 1.1 (Condition de Lipschitz). Soit  $f$  une fonction continue dans  $A$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . S'il existe une constante positive  $L$ , tel que :

$$(II.1.1) \quad |f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|,$$

pour tout  $(t, u)$  et  $(t, v)$  dans  $A$ , alors on dit que  $f$  vérifie une condition de Lipschitz (de constante  $L$ ) par rapport à la deuxième variable (noter que  $t$ , la première variable est fixe).

Cette définition, qui peut paraître difficile à vérifier est automatiquement satisfaite si la fonction d'une seule variable  $u \mapsto f(t, u)$ , où  $t$  est fixe, est continûment dérivable, dans ce cas on dénote par  $\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)$  sa dérivée. En effet en utilisant le Théorème de la valeur moyenne ou de Lagrange (voir § A.2) on obtient quelles que soient  $(t, u)$  et  $(t, v)$  dans  $A$ , avec  $u < v$  :

$$f(t, u) - f(t, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi)(u - v),$$

pour un certain  $\xi \in (u, v)$ , si on appelle  $L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi) \right|$  (dont l'existence est assuré par la continuité de  $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(t, u)$ ), on conclut que :

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|,$$

pour tout  $(t, u)$  et  $(t, v)$  dans  $A$ .

On va maintenant pouvoir énoncer avec tous les détails le principal Théorème de ce Chapitre,

THÉORÈME 1.2 (Picard). Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  ouvert et  $(t_0, u_0) \in A$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux réels positifs tels que, dénoté par  $I = (t_0 - r_1, t_0 + r_1)$  et  $J = (u_0 - r_2, u_0 + r_2)$  les intervalles ouverts centrés respectivement sur  $t_0$  et  $u_0$ , on ait  $\overline{I \times J} \subset A$ . Soit  $f(t, u)$  une fonction :

- (1) continue pour tout  $(t, u) \in A$  ;
- (2) vérifiant une condition de Lipschitz de constante  $L > 0$  dans  $I \times J$  ;
- (3) il existe  $M > 0$  tel que :  $|f(t, u)| \leq M$  pour tout  $(t, u) \in \overline{I \times J}$ .

Alors il existe  $r_0$ ,  $0 < r_0 \leq r_1$ , tel que le PdC

$$(II.1.2) \quad \begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

admet une solution unique dans  $(t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ .

Le reste du Chapitre est dévoué à la démonstration de ce Théorème, vu son importance on en donnera deux démonstrations légèrement différentes ; la première est obtenue en utilisant le Théorème du Point Fixe pour les application contractantes, ce qui nous permettra d'introduire et étudier ce dernier résultat. Dans la section 4 nous donnerons une nouvelle démonstration de ce résultat, valable seulement dans le cas analytique, qui nous permettra d'introduire et utiliser la méthode des séries majorantes.

On remarque que la condition  $\overline{I \times J} \subset A$  peut être toujours vérifiée en prenant  $r_1$  et  $r_2$  suffisamment petits et en utilisant le fait que  $A$  est ouvert.

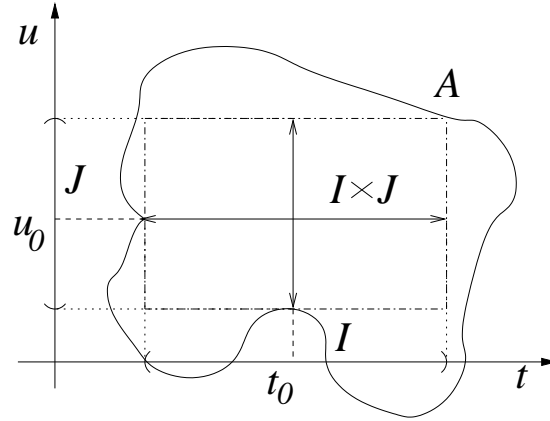


FIG. 1. Géométrie pour le Théorème de Picard.

## 2. Première démonstration du Théorème d'existence et unicité

Cette démonstration du Théorème d'existence et unicité nous donnera l'opportunité d'introduire et démontrer le Théorème de Contractions. On commence par écrire le PdC dans son équivalente formulation intégrale :

$$(II.2.1) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

et on remarque que le Théorème est démontré si on prouve que l'équation intégrale (II.2.1) a une unique solution continue définie pour  $t \in (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ . Pour cela on va introduire une application  $\mathcal{F}$ , qui à une fonction continue,  $v(t)$ , associe la fonction  $\mathcal{F}(v)(t)$  définie par :

$$(II.2.2) \quad \mathcal{F}(v)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds.$$

Donc l'équation intégrale (II.2.1) a une unique solution continue si il existe une unique fonction continue  $y(t)$  telle que :  $\mathcal{F}(y)(t) = y(t)$ , c'est-à-dire que l'application  $\mathcal{F}$  admet une seul *point fixe*.

Le *Théorème des Contractions* est un puissant outil qui sous des conditions assez générales nous permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une *application contractante*. On va donc arrêter la démonstration, pour introduire et prouver ce résultat, et après on finira la preuve du Théorème avec ce nouveau outil.

**2.1. Théorème des Contractions.** On considère un espace métrique  $(X, d)$  (voir § A.4) et une fonction  $F : X \rightarrow X$ , on introduit la définition suivante :

**DÉFINITION 2.1 (Contraction).** *S'il existe une constante réelle  $0 < \alpha < 1$ , telle que pour tout couple  $(x, y) \in X \times X$  on ait :*

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y),$$

*alors on dit que  $F$  est une contraction, ou application contractante.*

On a tout de suite le résultat suivant

PROPOSITION 2.2. *Une contraction est continue.*

DÉMONSTRATION. Soit  $\alpha$  la constante de contraction de  $F$ , alors pour tout  $\epsilon > 0$  on peut prendre  $\delta = \epsilon/\alpha$  et pour tout  $(x, y) \in X \times X$  tels que  $d(x, y) < \delta$ <sup>2</sup>, alors

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y) < \alpha \delta = \epsilon.$$

D'où la continuité. □

REMARQUE 2.3. *On a démontré plus que la continuité, on a démontré la continuité uniforme :  $\epsilon$  est indépendant de  $x$  et  $y$ .*

*Une contraction vérifie une condition de Lipschitz de constante strictement plus petite que 1.*

On peut maintenant énoncer le résultat

THÉOREME 2.4 (Des contractions). *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit  $F : X \rightarrow X$  une contraction. Alors il existe un seul point  $\bar{x} \in X$  tel que*

$$F(\bar{x}) = \bar{x},$$

*c'est-à-dire  $\bar{x}$  est un point fixe de  $F$ . De plus  $\bar{x}$  est un attracteur : pour tout  $x \in X$  alors <sup>3</sup>  $F^{\circ n}(x) \rightarrow \bar{x}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $x_0$  un point arbitraire de  $X$ , si  $F(x_0) = x_0$  on a trouvé le point fixe et on pourra passer à la preuve de son unicité. Autrement si  $F(x_0) \neq x_0$  on définit la suite :  $x_1 = F(x_0)$ ,  $x_2 = F(x_1)$ , en formule  $x_n = F^{\circ n}(x_0)$ . On va mesurer la distance (voir note numéro 2 à page 14) entre deux points successifs dans la suite, donc pour tout entier positif  $n$  on a :

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(F^{\circ(n+1)}(x_0), F^{\circ n}(x_0)) \leq \alpha d(F^{\circ n}(x_0), F^{\circ(n-1)}(x_0)) = \alpha d(x_n, x_{n-1}),$$

et donc par induction :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0).$$

Si on prend un deuxième entier positif  $m > n$ , on a

$$d(x_{m+1}, x_n) \leq \sum_{k=n}^m d(x_{k+1}, x_k) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^m \alpha^k,$$

et finalement avec  $\alpha < 1$  pour le calcul explicite de la somme)

$$d(x_{m+1}, x_n) \leq d(x_1, x_0) \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}.$$

Cette dernière relation implique que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy<sup>4</sup> dans  $(X, d)$  et donc puisque  $(X, d)$  est complet la suite est convergente (voir § A.4), il existe donc  $\bar{x} \in X$  tel que  $x_n \rightarrow \bar{x}$  pour  $n \rightarrow \infty$ .

Il nous reste à prouver que  $\bar{x}$  est un point fixe de  $F$  et qu'il est le seul. Par la continuité de  $F$  on a  $F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$  et donc :

$$F(\bar{x}) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \bar{x}.$$

<sup>2</sup> Puisque l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes,  $X$ , on peut utiliser la métrique  $d$  pour mesurer soit les distances entre les points que entre leurs images par  $F$ .

<sup>3</sup>  $F^{\circ n}(x)$  est la composition de  $F$ ,  $n$ -fois avec elle-même, évalué sur le point  $x$  :  $F^{\circ n}(x) = F(F^{\circ(n-1)}(x))$ .

<sup>4</sup> Dès que  $n$  est assez grand, le terme  $\alpha^n/(1 - \alpha)$  peut être rendu plus petit que tout  $\epsilon > 0$  fixé à priori.

Si maintenant on suppose qu'il existe un deuxième point fixe pour  $F$ ,  $\hat{x} \neq \bar{x}$ , on va montrer une contradiction et donc l'unicité du point fixe. On a

$$d(\bar{x}, \hat{x}) = d(F(\bar{x}), F(\hat{x})) \leq \alpha d(\bar{x}, \hat{x}),$$

mais  $\alpha < 1$ , donc cette relation est possible si et seulement si  $d(\bar{x}, \hat{x}) = 0$ , c'est-à-dire  $\hat{x} = \bar{x}$ , absurde.

Puisque  $x_0$  est un point générique dans  $X$  on a aussi montré que pour tout point de  $X$ , les itérés de  $F$  évalués sur ce point convergent vers  $\bar{x}$ .  $\square$

Dans la suite on aura besoin du suivant résultat

**PROPOSITION 2.5.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $F : X \rightarrow X$  une fonction continue. Si pour un certain entier positif  $m$  la fonction  $F^{\circ m}$  est une contraction, alors il existe un unique point fixe pour  $F$ , qui est un attracteur.*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $\bar{x}$  le point fixe attractif de  $F^{\circ m}$ , qui existe et est unique pour le Théorème 2.4. Pour tout entier positif,  $n$ , il existe des entiers  $k$  et  $l$  avec  $k \geq 0$  et  $0 \leq l < m$  tels que :  $n = km + l$ . Soit  $x_0 \in X$  quelconque, on indique par  $x_l = F^{\circ l}(x_0)$ , avec  $0 \leq l < m$ . Puisque  $\bar{x}$  est un attracteur pour  $F^{\circ m}$  on a  $[F^{\circ m}]^{\circ k}(x_l) \rightarrow \bar{x}$  quand  $k \rightarrow \infty$  pour  $0 \leq l < m$ . Mais  $[F^{\circ m}]^{\circ k}(x_l) = F^{\circ n}(x_0)$  et puisque  $n \rightarrow \infty$  si et seulement si  $k \rightarrow \infty$  ( $m$  et donc  $l$ , sont fixés), on a prouvé que pour tout  $x_0 \in X$ , alors  $F^{\circ n}(x_0) \rightarrow \bar{x}$ , c'est-à-dire  $\bar{x}$  est un attracteur aussi pour  $F$ .

On va maintenant montrer que  $\bar{x}$  est l'unique point fixe pour  $F$ , la démonstration est faite de la même façon que dans le Théorème 2.4, et la continuité joue un rôle fondamental (différemment du Théorème 2.4 on ne sait pas que  $F$  est une contraction et donc il faut assumer la continuité pour  $F$ ). Sur une ligne :

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(F(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ(n+1)}(x) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(x)\right) = F(\bar{x}).$$

$\square$

**2.2. Suite et Fin démonstration Théorème existence et unicité.** On fixe l'intervalle  $I_0 = (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ , avec  $r_0 < \min\{r_1, r_2/M\}$  et on va définir l'espace des fonctions continues sur  $I_0$  qui soient  $r_2$ -proches de la fonction constante  $u_0$  dans la norme (voir § A.4) du sup :  $X = \{u \in \mathcal{C}(I_0) : \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}$ .

$\mathcal{C}(I_0)$  est un espace complet (voir Exemple A.4.3) et  $X$  est un sous ensemble fermé (grâce à l'inégalité large  $\leq$  dans sa définition) de  $\mathcal{C}(I_0)$  donc il est complet.

On va maintenant montrer que  $\mathcal{F}$ , définie dans (II.2.2), vérifie :

- (1)  $\mathcal{F}(X) \subset X$  ;
- (2) il existe  $m$  entier positif, tel que  $\mathcal{F}^{\circ m}$  est une contraction ;

à ce point on peut utiliser le Théorème des Contractions 2.4 et conclure qu'il existe une unique fonction dans  $X$ , donc continue et définie sur  $I_0$ , telle que  $\mathcal{F}(u) = u$ , c'est-à-dire une unique solution du PdC.

Soit donc  $t \in I_0$  et  $\psi \in X$ ,  $\mathcal{F}(\psi)(t)$  est continue en étant définie comme intégrale de la composition d'une fonction continue  $f(s, u)$  avec une fonction continue  $\psi$  :  $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{C}(I_0)$  ; de plus

$$|\mathcal{F}(\psi)(t) - u_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds \right| \leq Mr_0,$$

où on a borné  $f$  avec son maximum  $M$  sur  $\overline{I \times J}$ , mais  $Mr_0 < r_2$ , par définition de  $r_0$ , donc en prenant le supremum sur  $t \in I_0$  on a  $\|\mathcal{F}(\psi) - u_0\|_\infty \leq r_2$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F}(X) \subset X$ .

Pour vérifier la propriété 2 on montre que pour tout  $\psi_1$  et  $\psi_2$  dans  $X$  et tout  $n$  entier positif on a :

$$(II.2.3) \quad |\mathcal{F}^{\circ n}(\psi_1)(t) - \mathcal{F}^{\circ n}(\psi_2)(t)| \leq \frac{L^n |t - t_0|^n}{n!} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty \quad \forall t \in I_0.$$

Cette relation est démontrée par *récurrence* (voir § A.1) sur  $n$  ; si  $n = 0$  elle est banale, on suppose qu'elle soit vraie pour  $n > 0$  et on la démontre pour  $n + 1$  :

$$|\mathcal{F}^{\circ(n+1)}(\psi_1)(t) - \mathcal{F}^{\circ(n+1)}(\psi_2)(t)| \leq \int_{t_0}^t \left| f(s, \mathcal{F}^{\circ n}(\psi_1)(s)) - f(s, \mathcal{F}^{\circ n}(\psi_2)(s)) \right| ds,$$

puisque  $\mathcal{F}^{\circ n}(X) \subset X$  pour tout  $n$ , on peut utiliser la condition de Lipschitz pour  $f$  et l'hypothèse d'induction :

$$\leq \int_{t_0}^t L \left| \mathcal{F}^{\circ n}(\psi_1)(s) - \mathcal{F}^{\circ n}(\psi_2)(s) \right| ds \leq L \int_{t_0}^t \frac{L^n |s - t_0|^n}{n!} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty ds.$$

Une intégration nous permet de conclure :

$$|\mathcal{F}^{\circ(n+1)}(\psi_1)(t) - \mathcal{F}^{\circ(n+1)}(\psi_2)(t)| \leq \frac{L^{(n+1)} |t - t_0|^{(n+1)}}{(n+1)!} \|\psi_1 - \psi_2\|_\infty.$$

La relation (II.2.3) nous permet de affirmer que pour  $n$  assez grand  $\mathcal{F}^{\circ n}$  est une contraction. Donc pour la Proposition 2.5  $\mathcal{F}$  admet un unique point fixe dans  $X$ , qui résulte être la solution du PdC.

**REMARQUE 2.6** (Cas vectoriel). *Le Théorème des contractions est valable pour un espace métrique complet général. Donc si on définit  $\Xi = \{\mathbf{u} \in \mathcal{C}(I_0) : \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|_\infty \leq r_2\}$ , espace des fonctions continues et bornées à valeurs dans  $\mathbb{R}^k$ , pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r_2$ -proche du vecteur constant  $\mathbf{u}_0$ , et on démontre une relation similaire à la (II.2.3) avec une norme au lieu de la valeur absolue, on peut adapter la même démonstration pour le cas vectoriel.*

### 3. Deuxième démonstration du Théorème d'existence et unicité

Encore une fois on considère le PdC (II.1.2) dans sa formulation intégrale équivalente :

$$(II.3.1) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

et on définit par récurrence la suite de fonctions  $(y_k(t))_{k \geq 0}$  telles que :  $y_0(t) = u_0$  et pour tout  $k \geq 1$

$$(II.3.2) \quad y_k(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{k-1}(s)) ds \quad \forall t \in I.$$

On veut démontrer que la suite  $(y_k)_{k \geq 0}$  converge vers une fonction  $y$  qui sera la seule solution du PdC version intégrale (II.3.1) et donc du PdC (II.1.2).

Puisque la propriété Lipschitz de  $f$  est valable seulement dans  $I \times J$ , et qu'on voudra l'utiliser dans la suite, on impose une première restriction sur la taille de l'intervalle temporel. Il faut donc contrôler que pour tout  $k \geq 0$  et  $t \in I$  on ait  $y_k(t) \in J$ , c'est-à-dire :  $|y_k(t) - u_0| < r_2$ . On affirme que le choix  $t \in (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ ,

avec  $r_0 < \min\{r_1, r_2/M\}$ , s'avère convenable. On va le vérifier par *réurrence* (voir § A.1) sur  $k$ . Pour  $k = 1$  on a :

$$|y_1(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_0)| ds \leq M|t - t_0|,$$

et donc avec le choix de  $r_0$ , on conclut  $|y_1(t) - u_0| < r_2$  pour tout  $|t - t_0| < r_0$ . On va supposer maintenant l'affirmation vraie pour  $k > 1$  et on la démontrera pour  $k + 1$ . Par définition

$$|y_{k+1}(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_k(s))| ds \leq M|t - t_0|,$$

où la dernière estimation a été faite car (par induction)  $|y_k(t) - u_0| < r_2$ , pour tout  $|t - t_0| < r_0 \leq r_1$ , donc  $f$  est évaluée dans un domaine où  $M$  est une borne supérieure pour  $f$ . On peut donc conclure que :  $|y_{k+1}(t) - u_0| < r_2$ .

**3.1. Une majoration.** On aura besoin de l'estimation suivante :

$$(II.3.3) \quad |y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq M \frac{L^k}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1},$$

pour tout  $k \geq 0$  et  $t \in I$ . Elle sera démontrée par *réurrence* sur  $k$ .

La relation (II.3.3) est vraie pour  $k = 0$  puisque par définition de  $y_1(t)$  et  $y_0(t)$  on a :

$$|y_1(t) - y_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_0) ds \right| \leq M|t - t_0|.$$

On la suppose (II.3.3) vraie pour un certain  $k > 0$  et on va démontrer qu'elle est vraie pour  $k + 1$  aussi. On va donc estimer

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| = \left| \int_{t_0}^t [f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))] ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))| ds,$$

en introduisant la condition de Lipschitz pour  $f$  on a :

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq \int_{t_0}^t L |y_k(s) - y_{k-1}(s)| ds,$$

et maintenant la condition (II.3.3) valable pour  $k$  nous permet d'estimer le terme intégrant :

$$|y_{k+1}(t) - y_k(t)| \leq \int_{t_0}^t L \frac{L^{k-1}}{k!} |s - t_0|^k ds,$$

d'où on obtient la thèse pour  $k + 1$  avec une intégration.

**3.2. Suite et fin.** La série de fonctions  $\sum_{k=0}^{+\infty} [y_{k+1}(t) - y_k(t)]$  converge en norme <sup>5</sup> pour tout  $t \in (t_0 - r_1, t_0 + r_1)$ . En effet pour tout  $t \in (t_0 - r_1, t_0 + r_1)$  en utilisant (II.3.3) on obtient :

$$\|y_{k+1} - y_k\|_{\infty} \leq M \frac{L^k r_1^{k+1}}{(k+1)!},$$

---

<sup>5</sup>Une série à valeur dans un espace de Banach,  $\sum_{n \geq 0} x_n$ , converge en norme si converge la série des normes :  $\sum_{n \geq 0} \|x_n\| < +\infty$ . Voir aussi § A.4



où on a introduit la *norme uniforme* pour les fonctions continues (voir § A.4), d'où l'estimation

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} [y_{k+1}(t) - y_k(t)] \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|y_{k+1} - y_k\|_{\infty} \leq \sum_{l \geq 1} \frac{M}{L} \frac{(Lr_1)^l}{l!} = \frac{M}{L} (e^{Lr_1} - 1) ,$$

et la convergence pour  $t \in I$ .

Cependant pour tout  $n \geq 1$  on peut écrire

$$y_n(t) = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} [y_{k+1}(t) - y_k(t)] ,$$

donc la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers une fonction continue <sup>6</sup>, ici appelée  $y(t)$ . Que la convergence soit uniforme peut être démontré de la façon suivante : pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $N > 0$  tel que pour tout  $t \in (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$  et pour tout  $n > N$  on a (en utilisant (II.3.3) dans  $(t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ ) :

$$|y_n(t) - y(t)| \leq \|y_n(t) - y(t)\|_{\infty} \leq \frac{M}{L} \sum_{j \geq k} \frac{(Lr_0)^j}{j!} .$$

La somme à droite est le reste de la somme pour la fonction exponentielle et donc <sup>7</sup>

$$|y_n(t) - y(t)| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lr_0)^n}{n!} e^{Lr_0} ,$$

et si  $n > N$  on a  $|y_n(t) - y(t)| < \epsilon$  pour tout  $t \in (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ . D'où la convergence uniforme.

Si maintenant on passe à la limite sur  $k$  dans (II.3.2) on obtient (par continuité de  $f$ )

$$y(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds ,$$

c'est-à-dire  $y$  est solution du PdC dans sa formulation intégrale et donc du PdC (II.1.2). Puisque la limite, si elle existe, est unique, on a aussi démontré l'unicité de la solution du PdC.

#### 4. Troisième démonstration du Théorème d'existence et unicité : cas analytique

Dans cette section on va donner une démonstration du Théorème d'existence et unicité du PdC valable seulement dans le cas *analytique*, le but de cette nouvelle version est donc seulement didactique et ça va nous permettre d'apprendre l'usage d'une méthode très importante dans beaucoup d'applications : *méthode des séries majorantes*.

On va donc considérer le PdC

$$(II.4.1) \quad \begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 . \end{cases}$$

<sup>6</sup>La limite d'une suite de fonctions continues qui convergent uniformément est une fonction continue, voir Exemple A.4.3.

<sup>7</sup>Par le Théorème de Taylor avec reste en forme différentielle :  $e^x - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} = \frac{x^k}{k!} e^{\xi}$  pour un certain  $0 < \xi < x$ .

où  $f$  est une fonction analytique dans un ouvert  $A \subset \mathbb{R}^2$  et  $(t_0, u_0) \in A$  ; on rappelle ici que une fonction analytique peut être écrite dans un certain voisinage de  $(t_0, u_0)$  comme séries de puissances convergente (dans ce voisinage) :

$$f(t, u) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} f_{nm} (t - t_0)^n (u - u_0)^m,$$

en plus ils existent trois constantes positives  $a, b$  et  $c$  telles que :

$$(II.4.2) \quad |f_{nm}| \leq ca^n b^m \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

On va maintenant chercher la solution du PdC,  $y(t)$ , sous forme de séries de puissances en  $t - t_0$  :

$$y(t) = \sum_{l \geq 0} y_l (t - t_0)^l.$$

On fera d'abord un calcul *formel*, c'est-à-dire on effectuera des opérations (comme dérivation d'une série et composition de fonctions, sans pouvoir les justifier à priori, et seulement à la fin de la démonstration on saura que toutes les opérations étaient admises grâce à la propriété d'analyticité qu'on démontrera.

La dérivée de  $y$  peut être calculée comme :

$$(II.4.3) \quad \frac{d}{dt} y(t) = \sum_{l \geq 1} l y_l (t - t_0)^{l-1},$$

et la condition initiale :  $y(t_0) = u_0$ , qui implique  $y_0 = u_0$ .

Si  $y(t)$  était une fonction analytique, alors aussi  $f(t, y(t))$  serait une fonction analytique (étant composition de fonctions analytiques). On va faire "comme si" ça était vrai et on développe  $f(t, y(t))$  en puissances de  $t - t_0$  et on regroupe les termes avec la même puissance de  $t - t_0$  :

$$(II.4.4) \quad \begin{aligned} f(t, y(t)) &= \sum_{n \geq 0, m \geq 0} f_{nm} (t - t_0)^n (y(t) - u_0)^m \\ &= \sum_{n \geq 0, m \geq 0} f_{nm} (t - t_0)^n \left( \sum_{l \geq 1} y_l (t - t_0)^l \right)^m \\ &= f_{00} + (t - t_0) (f_{10} + f_{01} y_1) + (t - t_0)^2 (f_{20} + f_{11} y_1 + f_{01} y_2 + f_{02} y_1^2) + \dots \end{aligned}$$

Dans cette dernière équation les coefficients  $(y_m)_{m \geq 1}$  sont inconnus, on va donc les déterminer en imposant que  $y$  soit une solution : on égalise les relations (II.4.3) et (II.4.5). En imposant que les coefficients devant les mêmes puissances de  $t - t_0$  soient égaux on trouve :

$$(II.4.5) \quad \begin{aligned} y_1 &= f_{00} \\ y_2 &= \frac{1}{2} (f_{10} + f_{01} y_1) = \frac{1}{2} (f_{10} + f_{01} f_{00}) \\ y_3 &= \frac{1}{3} (f_{20} + f_{11} y_1 + f_{01} y_2 + f_{02} y_1^2) = \frac{1}{3} \left[ f_{20} + f_{11} f_{00} + f_{01} \frac{1}{2} (f_{10} + f_{01} f_{00}) + f_{02} f_{00}^2 \right] \\ y_4 &= \dots \end{aligned}$$

On peut démontrer (par induction) que pour tout  $l$ ,  $y_l$  est un polynôme à coefficients rationnels positifs dans les variables  $(f_{nm})_{0 \leq n \leq l-1, 0 \leq m \leq l-1}$  que l'on va appeler  $p_l(f_{nm})$ .

Il nous reste à vérifier que  $y(t) = u_0 + \sum_{l \geq 1} y_l(t-t_0)^l$  avec  $y_l$  donnés par (II.4.5) est bien une fonction analytique, c'est-à-dire que cette série est convergente dans un certain voisinage de  $t_0$ , c'est maintenant qu'on va introduire les *séries majorantes*. Une série majorante pour  $f(t, u)$  est une série,  $F(t, u) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} F_{nm}(t-t_0)^n(u-u_0)^m$ , à coefficients *positifs*, tels que pour tout  $n$  et  $m$  on ait :

$$|f_{nm}| \leq F_{nm},$$

en symboles on écrit  $f \prec F$ . Grâce à la condition (II.4.2) d'analyticité sur  $f$  une série majorante pour  $f$  est donnée par :  $F(t, u) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} ca^n b^m (t-t_0)^n (u-u_0)^m$ . Cette série peut être sommée (dans  $|t-t_0|a < 1$  et  $|u-u_0|b < 1$ ) et sa somme est la fonction  $\frac{c}{(1-a(t-t_0))(1-b(u-u_0))}$ .

On considère maintenant le PdC avec même condition initiale et fonction  $F(t, u)$  :

$$(II.4.6) \quad \begin{cases} \dot{u} = F(t, u) \\ u(t_0) = u_0; \end{cases}$$

et on affirme que si  $Y(t)$  est sa solution formelle, alors elle est une série majorante pour la solution  $y(t)$  du PdC (II.4.1) :  $y \prec Y$ . En effet si on cherche la solution de la forme  $Y(t) = u_0 + \sum_{l \geq 1} Y_l(t-t_0)^l$  et on répète les mêmes passages faits pour  $y(t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} Y_1 &= F_{00} \\ Y_2 &= \frac{1}{2}(F_{10} + F_{01}F_{00}) \\ Y_3 &= \frac{1}{3} \left[ F_{20} + F_{11}F_{00} + F_{01} \frac{1}{2}(F_{10} + F_{01}F_{00}) + F_{02}F_{00}^2 \right] \\ Y_4 &= \dots, \end{aligned}$$

de plus on peut démontrer que pour tout  $l \geq 1$ ,  $Y_l$  est donnée par le même polynôme à coefficients rationaux positifs que  $y_l$  mais dans les variables  $(F_{nm})_{0 \leq n \leq l-1, 0 \leq m \leq l-1}$ . Finalement pour tout  $l \geq 1$  on a :

$$|y_l| = |p_l(f_{nm})| \leq p_l(|f_{nm}|) \leq p_l(F_{nm}) = Y_l,$$

la première inégalité est due à la positivité des coefficients de  $p_l$ , et la deuxième au fait que  $f \prec F$ , on a donc prouvé que  $y \prec Y$ .

Le PdC (II.4.6) a une solution explicite, comme montré dans § 4.1 :

$$Y(t) = u_0 + \frac{1}{b} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2bc}{a} \log(1 - a(t-t_0))} \right),$$

qui est analytique pour  $|t-t_0| < \frac{1}{a} (1 - e^{\frac{a}{2bc}})$  (intervalle temporel où la racine est bien définie). Cela implique que la solution formelle  $y(t)$  est analytique dans le même domaine et ici on a l'estimation  $y(t) \leq u_0 + \frac{1}{b} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2bc}{a} \log(1 - a(t-t_0))} \right)$ .

REMARQUE 4.1 (Dimension supérieure à 1). *Cette démonstration peut être adaptée très simplement au cas d'un PdC en dimension quelconque, et à bien voir*

ça est effectivement une des raisons de l'importance de la méthode des séries majorantes. La première remarque est qu'il faut travailler maintenant avec des fonctions à valeurs vecteurs et cela complique les formules puisque il faut tenir en compte toutes les composantes.

La deuxième remarque est que une fonction analytique des plusieurs variables,  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ , peut être écrite comme série de puissances :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n_1, \dots, n_d \geq 0} f_{n_1, \dots, n_d} x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d},$$

et une estimation similaire à la (II.4.2) est toujours valable. La composition de fonctions analytiques donne encore une fonction analytique, seulement la formule (II.4.5) va être plus compliquée vu le nombre plus grand de variables par rapport aux quelles il faut développer.

La partie restante de la démonstration est exactement la même, y comprise la définition de série majorante vectorielle sauf introduire une norme au lieu de la valeur absolue.

#### 4.1. Recherche de la solution explicite pour (II.4.6). On considère l'EDO :

$$\dot{u} = c \frac{1}{1 - a(t - t_0)} \frac{1}{1 - b(u - u_0)},$$

qui résulte à variables séparables (voir § V.3) et donc elle peut être résolue par quadratures :

$$\int_{u_0}^u (1 - b(u - u_0)) du = c \int_{t_0}^t \frac{dt}{1 - a(t - t_0)}.$$

Ces intégrales sont élémentaires :

$$(u - u_0) - \frac{b}{2} (u - u_0)^2 = -\frac{c}{a} \log [1 - a(t - t_0)],$$

on va résoudre l'équation précédente par rapport à  $u$  (équation du deuxième degré dans la variable  $u$ ) :

$$u(t) = u_0 + \frac{1}{b} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{2bc}{a} \log(1 - a(t - t_0))} \right).$$

### 5. Régularité des solutions du PdC

On a vu que si  $f$  est continue (et Lipschitz dans la deuxième variable) alors la solution du PdC est  $\mathcal{C}^1(I_0)$ , c'est-à-dire elle est continue et avec dérivée première continue.

Si  $f$  est plus régulière alors la solution du PdC aussi, sera plus régulière. Plus précisément si  $f \in \mathcal{C}^k$  alors la solution sera  $\mathcal{C}^{k+1}(I_0)$ . On peut démontrer cela par récurrence sur l'ordre de régularité  $k$ . Pour  $k = 0$  on connaît déjà le résultat, on va assumer cela vrai pour  $k$  et on le démontre pour  $k + 1$ . Soit donc  $f \in \mathcal{C}^{k+1}$  et  $u$  une solution de  $\dot{u} = f(t, u)$ , puisque  $f$  est aussi  $f \in \mathcal{C}^k$ , par hypothèse d'induction  $u$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$ . La fonction composée  $f(t, u(t))$  est  $\mathcal{C}^{k+1}$  (en étant composition de fonctions  $\mathcal{C}^{k+1}$ ), mais  $\dot{u} = f(t, u(t))$ , donc  $u \in \mathcal{C}^{k+2}$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^\infty$ , infiniment dérivable avec toutes dérivées continues, alors  $u \in \mathcal{C}^\infty$ .

## 6. Conclusions

Dans ce Chapitre on a montré (de trois façons différentes) que le Problème de Cauchy admet une solution unique si la fonction  $f$  est assez régulière. Quelle que soit la régularité la solution est, en général, seulement *locale* (voir Exemple I.6.2). Dans le Chapitre III on étudiera la question de *prolongeabilité des solutions* et sous quelles hypothèses on aura des solutions définies pour tout temps.

La méthode de Picard est puissante pour démontrer l'existence des solutions mais elle n'est point utile pour déterminer les solutions explicites et/ou pour une étude qualitative. On a donc besoin d'étudier des méthodes qui vont nous permettre (hélas seulement dans certains cas, néanmoins très fréquents dans les applications et donc utiles) de trouver une solution explicite. Cela sera le but des Chapitre V et Chapitre VI. L'étude qualitative des solutions sera étudiée dans un cas simple (voisinage d'une solution d'équilibre) dans le Chapitre VII, et avec beaucoup plus de détails dans le Cours de Master 1 *Théorie Qualitative des Systèmes Dynamiques*.

## CHAPITRE III

### ***Prolongement des solutions.***

Dans ce Chapitre on va aborder et résoudre une question laissée ouverte dans le Chapitre II, à savoir la question de prolongeabilité des solutions. Le Théorème II.1.2 nous permet de démontrer l'existence d'une solution définie dans un voisinage de la condition initiale  $t_0$ ,  $I_0 = (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$ . On a déjà vu des exemples où la solution n'est pas définie pour tout  $t$  réel, cependant on peut espérer pouvoir *prolonger* la solution donnée par le précédent Théorème dans des intervalles contenant l'intervalle  $I_0$ , jusqu'à obtenir une solution définie sur l'intervalle le plus grand possible.

Encore une fois pour simplifier les notations on ne considérera explicitement que le cas scalaire, c'est-à-dire dimension  $n = 1$ , mais toute la théorie peut être étendue au cas multidimensionnel.

#### 1. Définitions et Théorème d'existence

On remarque que dans tout ce Chapitre on va supposer vérifiées les conditions du Théorème II.1.2, c'est-à-dire *existence* et *unicité locale* des solutions.

**DÉFINITION 1.1** (Prolongement et Solution Maximale). *On considère l'EDO  $\dot{u} = f(t, u)$  et  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  deux solutions définies, respectivement, dans les intervalles  $I_1 = (a_1, b_1)$  et  $I_2 = (a_2, b_2)$ . On appellera  $u_2$  un prolongement de  $u_1$  si :*

- (1)  $I_1 \subset I_2$  ;
- (2)  $u_1(t) = u_2(t)$  pour tout  $t \in I_1$ .

*Une solution qui n'admet aucun prolongement sera dite maximale.*

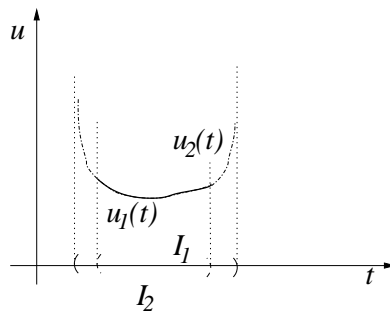


FIG. 1. Définition de prolongement :  $u_2$  prolonge  $u_1$  au delà de  $I_1$ .

EXEMPLE 1.2. *Considérons le PdC*

$$\begin{cases} \dot{u} &= -2t^2 u^2 \\ u(0) &= -1; \end{cases}$$

dont la fonction  $y(t) = \frac{1}{t^2-1}$ , définie pour  $|t| < 1$ , est une solution (démontrez-le ou bien vérifiez-le). Cette solution est maximale, puisque elle n'admet pas de prolongement contenant  $|t| \leq 1$ .

On observe que la condition 2 peut être affaiblie (si comme nous supposons les conditions d'existence et unicité sont vérifiées) en demandant que  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  coïncident en un point de  $I_1$ , comme le Lemme suivant nous montre.

LEMME 1.3. *Soient  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  deux solutions de l'EDO,  $\dot{u} = f(t, u)$  définies dans l'intervalle  $I = (a, b)$ . Si il existe un point  $\bar{t} \in I$  tel que :  $u_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t})$ , alors  $u_1 \equiv u_2$  dans  $I$ .*

DÉMONSTRATION. On considère séparément les cas  $t > \bar{t}$  et  $t < \bar{t}$ . Soit  $E$  l'ensemble des points de  $(\bar{t}, b)$  où  $u_1 \neq u_2$ . On suppose par absurde que  $E$  ne soit pas vide et on appelle  $t_0 = \inf E$ ; clairement on a  $\bar{t} \leq t_0 < b$  et  $u_1(t_0) = u_2(t_0)$ . Cela est banal si  $\bar{t} = t_0$ , par contre si  $\bar{t} < t_0$  le résultat suit de la continuité des solutions et de l'égalité  $u_1(t) = u_2(t)$  pour  $\bar{t} \leq t < t_0$ .

On considère maintenant le PdC avec donné initiale  $(t_0, u_1(t_0))$  :

$$\begin{cases} \dot{u} &= f(t, u) \\ u(t_0) &= u_1(t_0); \end{cases}$$

pour le Théorème II.1.2 il existe une solution unique dans  $I$ , voisinage de  $t_0$ , donc les deux solutions  $u_1$  et  $u_2$  doivent coïncider :  $u_1 \equiv u_2$  dans  $I$ . Ce qui est en contradiction avec :  $u_1(t) = u_2(t)$  pour  $\bar{t} \leq t \leq t_0$  et  $u_1(t) \neq u_2(t)$  pour  $t > t_0$ . On conclut que  $E$  doit être vide, c'est-à-dire il n'y a pas de points dans  $(\bar{t}, b)$  où  $u_1 \neq u_2$ , donc  $u_1 \equiv u_2$  dans  $(\bar{t}, b)$ .

De la même façon on montre que  $u_1 \equiv u_2$  dans  $(a, \bar{t})$  et la preuve du Lemme est conclue.  $\square$

Cela nous permet d'affirmer que deux solutions du même PdC, définies dans des intervalles différents coïncident sur l'intersection des deux intervalles.

COROLLAIRE 1.4. *Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions d'un PdC définies respectivement dans  $I_1$  et  $I_2$ . Si  $I_1 \subset I_2$  alors  $u_2$  est un prolongement de  $u_1$ .*

Le résultat suivant permet de répondre à la question fondamentale : toute EDO admet-elle une solution maximale ?

THÉORÈME 1.5 (Existence de solutions maximales). *Chaque solution  $u(t)$  de l'EDO,  $\dot{u} = f(t, u)$ , admet un prolongement maximal.*

DÉMONSTRATION. On appelle  $I_u$  l'intervalle dans lequel la solution  $u(t)$  est définie. Soit  $\mathcal{U}$  l'ensemble de tous les prolongements de  $u$ , chaque élément  $v \in \mathcal{U}$  est défini dans un intervalle  $I_v = (a_v, b_v)$  :  $I_u \subset I_v$  et  $u(t) = v(t)$  dans  $I_u$ . De plus si  $v$  et  $w$  sont dans  $\mathcal{U}$  alors  $v \equiv w$  dans  $I_v \cap I_w$ .

Nous définissons les quantités suivantes

$$a = \inf_{v \in \mathcal{U}} a_v \quad \text{et} \quad b = \sup_{v \in \mathcal{U}} b_v.$$

Si  $t \in (a, b)$  alors il existe  $v \in \mathcal{U}$  telle que  $t \in I_v$ , on va définir la fonction  $\bar{u}$  au point  $t$  :  $\bar{u}(t) = v(t)$ . Cette définition est bien donnée, en fait si il existe aussi  $w \in \mathcal{U}$  telle que  $t \in I_w$ , alors on aurait pu définir  $\bar{u}(t) = w(t)$ , mais on a déjà observé que  $v \equiv w$  dans  $I_v \cap I_w$ , donc  $\bar{u}(t) = w(t) = v(t)$ .

On va maintenant démontrer que  $\bar{u}$  est un prolongement de  $u$ . D'abord  $\bar{u}$  est une solution de l'EDO : si  $t \in I_v$  alors  $\bar{u}(t) = v(t)$  et  $\bar{u} \equiv v$  dans un voisinage de  $t$ , donc  $\dot{\bar{u}}(t) = \dot{v}(t)$  et

$$\dot{\bar{u}}(t) = \dot{v}(t) = f(t, v(t)) = f(t, \bar{u}(t)).$$

Par construction  $\bar{u}$  est définie dans  $\bar{I} = (a, b)$  et par définition de  $\mathcal{U}$  on a  $I_u \subset I_v$  pour tout  $v \in \mathcal{U}$ , donc  $I_u \subset \bar{I}$ . De plus pour chaque  $v \in \mathcal{U}$  on a  $u \equiv v$  dans  $I_u$  et donc  $u \equiv \bar{u}$  pour tout  $t \in I_u$ .

Il nous reste à prouver que  $\bar{u}$  est un prolongement maximal. Cela découle immédiatement du fait que pour tout  $v \in \mathcal{U}$  on a  $I_v \subset (a, b)$ .  $\square$

Dans la prochaine section nous allons étudier les “raisons géométriques” qui permettent ou pas de construire un prolongement, c'est-à-dire le comportement des solutions près de la frontière de l'intervalle de définition locale.

## 2. Construction du prolongement

La possibilité de construire un prolongement est liée au comportement de la solution quand on s'approche au bord de l'intervalle d'existence locale. Si  $v(t)$  est une solution de  $\dot{u} = f(t, u)$  dans  $(a, b)$  et si on suppose que la limite suivante existe :

$$(III.2.1) \quad \lim_{t \rightarrow b^-} v(t) = v_0,$$

et le point  $(b, v_0)$  appartienne à l'ensemble où  $f$  vérifie les conditions du Théorème II.1.2, alors on considère le PdC suivant :

$$\begin{cases} \dot{u} &= f(t, u) \\ u(b) &= v_0, \end{cases}$$

qui par le Théorème de Picard admet une solution unique dans un voisinage de  $b$ , que nous allons appeler  $w(t)$ . Mais alors la fonction

$$u(t) = \begin{cases} v(t) & \text{dans } (a, b) \\ w(t) & \text{dans } [b, b + r_0), \end{cases}$$

est un prolongement de  $v$ , en étant une solution de  $\dot{u} = f(t, u)$  dans  $(a, b + r_0)$  : puisque  $(a, b + r_0)$  contient  $(a, b)$  et  $u(t)$  coïncide avec  $v(t)$  dans  $(a, b)$ .

Pour démontrer que  $u(t)$  est une solution il faut vérifier que  $u(t)$  est dérivable en  $b$  et elle y vérifie l'équation différentielle. Tout d'abord on vérifie que la limite  $\lim_{t \rightarrow b} u(t)$  existe et donc la continuité de  $u$ . Par définition de  $u$ ,  $u(b) = w(b)$  et  $w(b) = v_0$  en étant solution du PdC, donc

$$\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = \lim_{t \rightarrow b^-} v(t) = v_0 = \lim_{t \rightarrow b^+} w(t) = \lim_{t \rightarrow b^+} u(t).$$

Pour le Théorème de Lagrange ( $u$  est continue dans  $(a, b]$  et dérivable dans  $(a, b)$ ) (voir § A.2) on a pour tout  $t \in (a, b)$  :

$$\frac{u(t) - u(b)}{t - b} = \dot{u}(\xi),$$



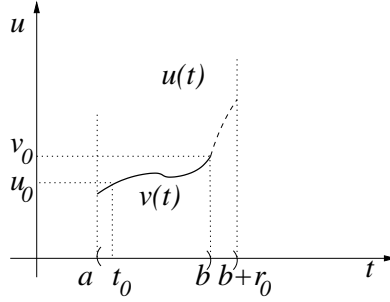


FIG. 2. Construction du prolongement.

avec  $\xi \in (t, b)$ , mais

$$\dot{u}(\xi) = \dot{v}(\xi) = f(\xi, v(\xi)).$$

En passant à la limite  $t \rightarrow b^-$  on a ( $\xi \rightarrow b$ , continuité de  $u$  et par hypothèse le point  $(b, v_0)$  appartient au domaine de continuité de  $f(t, u)$ ) :

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{u(t) - u(b)}{t - b} = f(b, v_0),$$

de la même façon on peut démontrer que

$$\lim_{t \rightarrow b^+} \frac{u(t) - u(b)}{t - b} = f(b, v_0),$$

et donc la dérivabilité de  $u$  en  $b$  où elle vérifie l'équation différentielle.

La méthode ici présentée est assez générale mais elle a un point faible dans la limite (III.2.1) : ce n'est pas toujours facile à démontrer que cette limite existe, puisque en général on ne connaît pas une forme explicite de la solution. Les deux résultats suivants nous permettent de résoudre la question dans certains cas.

**THÉORÈME 2.1.** *Soit  $u(t)$  une solution de  $\dot{u} = f(t, u)$  définie dans  $(a, b)$ . Nous supposons qu'il existe une suite  $(t_n)_{n \geq 0}$  strictement croissante telle que :*

$$(III.2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = b \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = u_0,$$

*et que le point  $(b, u_0)$  appartienne au domaine,  $A$ , où  $f$  vérifie les hypothèses du Théorème II.1.2. Alors*

$$(III.2.3) \quad \lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = u_0,$$

*et donc la solution  $u$  admet un prolongement.*

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $A$  est ouvert on peut trouver deux intervalles,  $I$  et  $J$ , centrés respectivement en  $b$  et  $u_0$  (qui appartiennent à  $A$  par hypothèse), tels que  $I \times J \subset A$ . On dénote  $M = \sup_{I \times J} |f(t, u)|$ . Pour démontrer l'existence de la limite (III.2.3) on prouvera que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $j \in \mathbb{N}$  tel que si  $t_j < t < b$  alors on a :  $|u(t) - u_0| < \epsilon$ .

Soit  $\epsilon > 0$  suffisamment petit pour avoir  $(u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon) \subset J$ , il existe  $j \in \mathbb{N}$  (suffisamment grand) tel que  $t_j \in I$  et :

$$|t_j - b| < \frac{\epsilon}{4M} \quad , \quad |u(t_j) - u_0| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si on arrive à démontrer que

$$(III.2.4) \quad |u(t) - u(t_j)| < \frac{\epsilon}{2},$$

pour  $t_j < t < b$ , alors on a fini puisque :

$$|u(t) - u_0| \leq |u(t) - u(t_j)| + |u(t_j) - u_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

comme on voulait démontrer.

Pour prouver (III.2.4) on procède par contradiction, on suppose que celle-ci ne soit pas vraie et donc que l'ensemble  $E = \{t \in (t_j, b) : |u(t) - u(t_j)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$  ne soit pas vide. Soit  $\tau = \inf E$ , puisque  $|u(t) - u(t_j)|_{t=t_j} = 0$  et  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  on a  $\tau > t_j$ .

Si on prend  $\xi \in (t_j, \tau)$  on a (par définition de  $\tau$ )  $|u(\xi) - u(t_j)| < \frac{\epsilon}{2}$  et donc

$$|u(\xi) - u_0| \leq |u(\xi) - u(t_j)| + |u(t_j) - u_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2},$$

mais  $(u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon) \subset J$  donc  $u(\xi) \in J$ . Puisque  $t_j \in I$  et  $\xi \in (t_j, b)$  on a  $\xi \in I$  et donc le couple  $(\xi, u(\xi))$  appartient à  $I \times J$  où on a l'estimation  $|f(t, u)| \leq M$ , donc  $|\dot{u}(\xi)| = |f(\xi, u(\xi))| \leq M$ .

Si on utilise le point  $\xi$  pour le Théorème de Lagrange on a

$$|u(\tau) - u(t_j)| = |\dot{u}(\xi) (\tau - t_j)|,$$

et

$$\frac{\epsilon}{2} \leq |u(\tau) - u(t_j)| = |\dot{u}(\xi) (\tau - t_j)| \leq M|b - t_j| < M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{4},$$

et voilà une contradiction :  $\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{4}$ , donc  $E$  est vide, c'est-à-dire pour tout  $t \in (t_j, b)$  on a  $|u(t_j) - u(t)| < \frac{\epsilon}{2}$ .  $\square$

Ce résultat peut être récrit de la façon suivante :

**THÉORÈME 2.2.** *Soit  $u(t)$  une solution maximale de l'équation  $\dot{u} = f(t, u)$  et soit  $(a, b)$  son intervalle de définition. Pour tout compact  $K$ , contenu dans  $A$  (où  $f$  vérifie les hypothèses du Théorème II.1.2) il existe  $\delta > 0$  (qui dépend de  $K$ ) tel que pour tout  $t \notin (a + \delta, b - \delta)$  alors  $(t, u(t))$  n'appartient pas à  $K$ .*

**DÉMONSTRATION.** On suppose que la thèse soit fausse, donc on a une infinité de points  $(t_j)_{j \geq 0}$ , arbitrairement proches et qui convergent vers  $b$  (le même raisonnement peut être fait pour  $a$ ), tels que  $(t_j, u(t_j))$  appartienne à  $K$ . Puisque  $K$  est compact on peut extraire une sous-suite  $(t_{j_n})_{n \geq 0}$ , tel que  $u(t_{j_n})$  converge vers un point  $u_0$ , donc  $(t_{j_n}, u(t_{j_n})) \rightarrow (b, u_0) \in K \subset A$ . Mais alors pour le Théorème 2.1 la solution  $u(t)$  serait prolongeable en contradiction avec le fait que  $u(t)$  soit maximale.  $\square$

**REMARQUE 2.3.** *Le résultat précédent nous dit que lorsque  $t \rightarrow b^-$  le point  $(t, u(t))$  se dirige vers la frontière de  $A$  (un résultat similaire est vrai pour  $t \rightarrow a^+$ ), mais il ne faut pas croire qu'il converge vers un point de  $\partial A$ , comme l'exemple suivant nous montre.*

**EXEMPLE 2.4.** *On considère l'équation différentielle*

$$\dot{u} = u - \frac{e^t}{t^2} \cos \frac{1}{t},$$

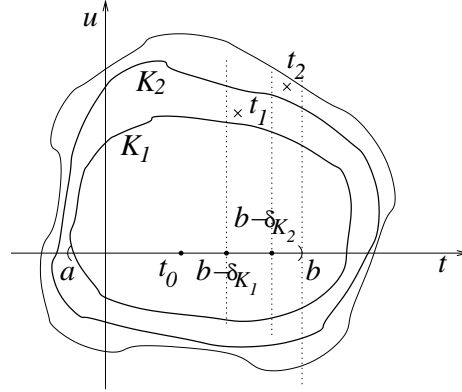


FIG. 3. Géométrie du Théorème 2.2.

la fonction  $f(t, u) = u - \frac{e^t}{t^2} \cos \frac{1}{t}$  ne vérifie pas les hypothèses du Théorème II.1.2 (elle n'est pas bornée); elle est cependant continue et Lipschitzienne dans  $A = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$  avec constante de Lipschitz  $L = 1$ .

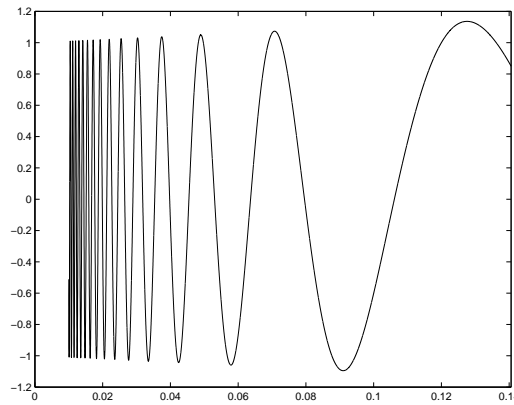
La fonction  $y(t) = e^t \sin \frac{1}{t}$ , pour  $t > 0$ , est une solution (vérifiez-le) de l'équation différentielle. La frontière de  $A$  est  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , et quand  $t \rightarrow 0^+$  le point  $(t, y(t))$  ne converge vers aucun point de  $\partial A$ , en fait pour tout  $y_0 \in [-1, 1]$  on peut trouver une suite  $(t_n)_n$  telle que  $t_n \rightarrow 0$  et  $y(t_n) \rightarrow y_0$  pour  $n \rightarrow \infty$ . Par exemple soit  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  tel que  $\sin \theta_0 = y_0$  alors la suite  $t_n = (\theta_0 + 2\pi n)^{-1}$  vérifie :

$$t_n = \frac{1}{\theta_0 + 2\pi n} \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

et

$$y(t_n) = e^{(\theta_0 + 2\pi n)^{-1}} \sin(\theta_0 + 2\pi n) = e^{(\theta_0 + 2\pi n)^{-1}} \sin \theta_0 = e^{(\theta_0 + 2\pi n)^{-1}} y_0 \rightarrow y_0,$$

puisque  $e^t \rightarrow 1$  quand  $t \rightarrow 0$ .

FIG. 4. Graphique de la fonction  $y(t) = e^t \sin \frac{1}{t}$  proche de  $t = 0$ .

REMARQUE 2.5 (Cas prolongeable). On considère le cas où  $A$  est de la forme  $I \times \mathbb{R}$ , avec  $I = (\alpha, \beta)$  intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est bornée :  $|f| \leq M$  dans  $A$ , et si  $u$  est une solution dans  $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$ , alors elle est bornée dans un voisinage de  $b$  et donc la solution est prolongeable.

Soient  $t, s \in (\alpha, \beta)$ , alors pour la solution on peut écrire, en utilisant la borne sur  $f$  :

$$|u(t) - u(s)| = \left| \int_s^t f(\tau, u(\tau)) d\tau \right| \leq M|t - s|,$$

d'où on obtient que  $u$  est bornée. De plus cette relation implique par le critère de Cauchy que  $u(t) \rightarrow u_0$  quand  $t \rightarrow b$  et pour le Théorème 2.1 la solution est prolongeable.

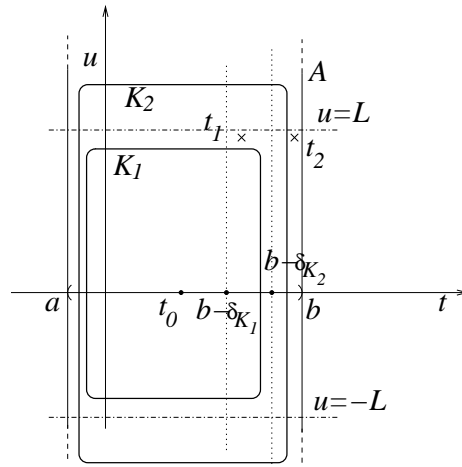


FIG. 5. Géométrie du Théorème 2.2 pour  $A = (a, b) \times \mathbb{R}$ .

Cette remarque nous donne un bon outil pour comprendre quand une solution est prolongeable : solutions bornées dans un voisinage de  $b$  et/ou  $a$ . On a donc

COROLLAIRE 2.6. Soit  $u(t)$  une solution de  $\dot{u} = f(t, u)$  dans  $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$  (on rappelle que  $f$  est définie dans  $(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$ ). Si il existe deux constantes  $P \geq 0$  et  $Q > 0$  telles que pour tout  $t \in (a, b)$  et  $u \in \mathbb{R}$  on a :

$$(III.2.5) \quad |f(t, u)| \leq P + Q|u| \text{ (ces fonctions sont appelées sublinéaires),}$$

alors pour tout  $t, s \in (a, b)$  on a :

$$|u(t)| \leq \left[ \frac{P}{Q} + |u(s)| \right] e^{Q|t-s|}.$$

DÉMONSTRATION. De l'équation différentielle et de la borne sur  $f$  on a :

$$|\dot{u}(t)| \leq P + Q|u(t)|;$$

puisque la fonction valeur absolue n'est pas dérivable nous allons la "régulariser" en posant  $\sigma > 0$  et  $z(t) = \sqrt{\sigma^2 + u^2(t)}$ , alors pour tout  $t \in (a, b)$  on a :

$$|\dot{z}(t)| = \left| \frac{u(t)\dot{u}(t)}{\sqrt{\sigma^2 + u^2(t)}} \right| \leq |\dot{u}(t)|,$$

où on a utilisé l'estimation  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$ . Donc on obtient

$$|\dot{z}(t)| \leq P + Q|u(t)| \leq P + Q|z(t)|,$$

c'est-à-dire :

$$\left| \frac{d}{dt} \log(P + Qz(t)) \right| \leq Q,$$

et avec une intégration entre  $t$  et  $s$  :

$$\log \frac{P + Qz(t)}{P + Qz(s)} \leq Q|t - s|,$$

qui revient au même que :

$$P + Qz(t) \leq [P + Qz(s)] e^{Q|t-s|}.$$

Mais  $Q|u(t)| \leq Qz(t) \leq Qz(t) + P$  donc :

$$|u(t)| \leq \frac{P + Qz(s)}{Q} e^{Q|t-s|},$$

pour tout  $t, s$  dans  $(a, b)$  et pour tout  $\sigma > 0$ . Si on passe maintenant à la limite pour  $\sigma \rightarrow 0^+$ , on a  $z(t) \rightarrow |u(t)|$  et :

$$|u(t)| \leq \left[ \frac{P}{Q} + |u(s)| \right] e^{Q|t-s|}.$$

□

On conclut cette section avec le résultat suivant

**THÉORÈME 2.7.** *Soit  $f(t, u)$  définie dans  $A = I \times \mathbb{R}$ , avec  $I = (\alpha, \beta)$ . Supposons que pour tout compact  $K \subset I$  il existe deux constantes  $P_K$  et  $Q_K$ , telles que :*

$$(III.2.6) \quad |f(t, u)| \leq P_K + Q_K|u| \quad \forall t \in K, \forall u \in \mathbb{R}.$$

*Alors chaque solution  $u(t)$  de l'équation  $\dot{u} = f(t, u)$  est prolongeable en une solution définie dans tout  $I$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $u(t)$  une solution et soit  $\bar{u}(t)$  la solution maximale définie dans  $(a, b) \subset I$ . Si on avait  $b < \beta$  alors en prenant un compact  $(a, b) \subset K \subset I$  par le Corollaire 2.6  $\bar{u}$  serait bornée dans un voisinage de  $b$ , mais cela implique (remarque 2.5) qu'elle est prolongeable au delà de  $b$ , qui est absurde puisque  $\bar{u}$  est maximale. Un même raisonnement peut être fait pour  $a$  et donc on conclut que toute solution  $u$  est prolongeable dans  $I$  tout entier. □

## CHAPITRE IV

### ***Dépendance continue par rapport aux paramètres.***

Dans ce Chapitre nous considérerons brièvement le problème de la dépendance d'une solution d'un PdC (sous conditions d'existence et unicité) par rapport aux données initiales et à des paramètres dont la fonction  $f$  pourrait dépendre.

Nous montrerons d'abord un résultat de dépendance continue de la solution du PdC par rapport aux paramètres et aux conditions initiales, ensuite nous prouverons un résultat de dépendance différentiable par rapport aux paramètres et énoncerons le résultat de dépendance différentiable par rapport aux conditions initiales. Ensuite nous donnerons quelques estimation sur l'écart entre deux solutions du même PdC mais avec données initiales différentes et comment se comportent deux solutions de deux PdC "proches l'un de l'autre" avec même données initiales.

#### 1. Dépendance Continue par rapport aux paramètres

Considérons un EDO en forme normale scalaire (le cas vectoriel pourra être considéré de façon similaire) qui dépend des paramètres réels  $\mu_1, \dots, \mu_l$  :

$$(IV.1.1) \quad \dot{x} = f(t, x, \boldsymbol{\mu}),$$

où nous avons utilisé la notation compacte  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ .

La fonction  $f$  est définie dans l'ouvert  $A \subset \mathbb{R}^{l+2}$  où, elle et sa dérivée première par rapport à  $x$ , sont des fonctions continues par rapport aux variables  $(t, x, \boldsymbol{\mu})$ . Fixons les conditions initiales  $(t_0, x_0)$  pour le PdC :

$$(IV.1.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \boldsymbol{\mu}) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

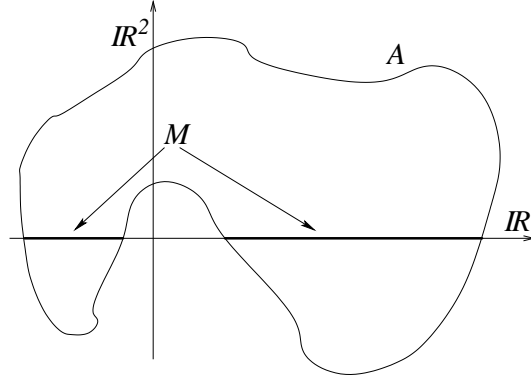
et désignons par  $M \subset \mathbb{R}^l$  l'ensemble des points  $\boldsymbol{\mu}$  tel que le point  $(t_0, x_0, \boldsymbol{\mu})$  soit dans  $A$ . Il est évident que  $M$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^l$  et que à tout point  $\boldsymbol{\mu} \in M$  on peut associer une *unique solution maximale*,  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$ , du PdC définie dans l'intervalle  $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$  qui dépend évidemment de  $\boldsymbol{\mu}$ .

Soit  $T$  l'ensemble des couples  $(t, \boldsymbol{\mu})$  pour lesquels la fonction  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$  est définie ; cet ensemble peut être défini par les deux conditions :

$$\boldsymbol{\mu} \in M \text{ et } t \in (m_1(\boldsymbol{\mu}), m_2(\boldsymbol{\mu})) .$$

On peut donc démontrer le résultat

**THÉOREME 1.1.** *L'ensemble  $T$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{l+1}$  et la fonction  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$  est continue sur  $T$ .*

FIG. 1. L'ensemble  $M$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $(t^*, \mu^*)$  un point de  $T$ , nous allons démontrer que tout point  $(t, \mu) \in \mathbb{R}^{l+1}$  suffisamment proche de  $(t^*, \mu^*)$ , appartient à  $T$  (et donc  $T$  est ouvert) en montrant que  $\phi(t, \mu)$  est bien définie. De plus l'écart  $|\phi(t, \mu) - \phi(t^*, \mu^*)|$  est petit d'où la continuité de  $\phi$ .

Nous allons considérer séparément les deux cas  $t_0 \geq t^*$  et  $t_0 \leq t^*$ , mais puisque le traitement du deuxième est très fort similaire au premier nous développerons en détails seulement le premier.

Puisque  $(t^*, \mu^*) \in T$  par définition  $\phi(t^*, \mu^*)$  est bien définie et il doit résulter  $t^* < m_2(\mu^*)$ , c'est pour ça qu'il existe  $r_2 \in (t^*, m_2(\mu^*))$  tel que  $\phi(t, \mu^*)$  soit définie pour  $t_0 \leq t \leq r_2$ .

Quand  $t$  parcourt l'intervalle  $[t_0, r_2]$ , le point  $(t, \phi(t, \mu^*), \mu^*)$  décrit une courbe, appelée  $\mathcal{Q}$  dans  $\mathbb{R}^{l+2}$ . Soit  $\mathcal{P}$  un voisinage tubulaire de la courbe  $\mathcal{Q}$  défini par les conditions :

$$(IV.1.3) \quad t_0 \leq t \leq r_2, \quad |x - \phi(t, \mu^*)| \leq a, \quad |\mu - \mu^*| \leq b,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux réels positifs suffisamment petits afin que  $\mathcal{P}$  soit contenu dans  $A$ ; cela est toujours possible puisque  $\mathcal{P}$  est fermé, borné et contenu dans l'ouvert  $A$ .

La dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  est continue et donc bornée par un certain  $K > 0$  sur  $\mathcal{P}$ , donc grâce au Théorème de Lagrange (ou de la valeur moyenne, voir § A.2) on peut conclure que :

$$(IV.1.4) \quad |f(t, x_1, \mu) - f(t, x_2, \mu)| \leq K|x_1 - x_2| \quad \forall (t, x_i, \mu)_{i=1,2} \in \mathcal{P}.$$

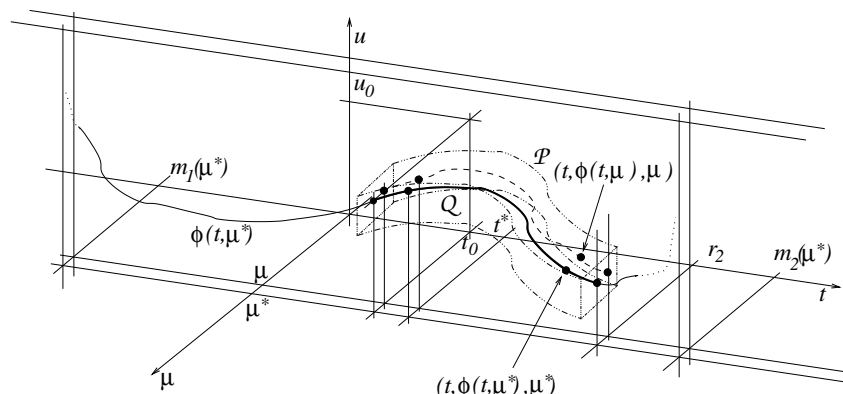
La fonction  $f$  est uniformément continue sur  $\mathcal{P}$ , en étant une fonction continue sur un compact, donc pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta_1(\epsilon) > 0$  (qui ne dépend que de  $\epsilon$ ) tel que pour tout couple  $(t_i, x_i, \mu_i)_{i=1,2}$  dans  $\mathcal{P}$  on a :

$$|f(t_1, x_1, \mu_1) - f(t_2, x_2, \mu_2)| \leq \epsilon,$$

dès que les points  $(t_1, x_1, \mu_1)$  et  $(t_2, x_2, \mu_2)$  sont au moins  $\delta_1$ -proches. En particulier on a :

$$(IV.1.5) \quad |f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu^*)| \leq \epsilon \quad \forall |\mu - \mu^*| < \delta_1,$$

si  $(t, x, \mu)$  et  $(t, x, \mu^*)$  appartiennent à  $\mathcal{P}$ .



Soit  $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| \leq b$  et prenons maintenant comme coordonné  $x$  la solution du PdC,  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$ , avec donné initiale  $(t_0, x_0)$ , définie pour  $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$ . Le Théorème III.2.2 affirme que le point  $(t, \phi(t, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu})$  doit quitter l'ensemble fermé  $\mathcal{P}$  quand  $t \rightarrow m_2(\boldsymbol{\mu})$ ; soit  $t_2$  le premier instant auquel le point atteint la frontière de  $\mathcal{P}$ . Il est évident que  $t_0 < t_2 \leq r_2$ , car si  $t_2 > r_2$ , alors le point  $(t, x, \mu')$  aurait déjà quitté l'ensemble  $\mathcal{P}$ .

$$\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*) = \int_{t_0}^t (f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) - f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)) \, ds \quad \forall t \in [t_0, t_2].$$
$$|f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) - f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)| \leq |f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}), \boldsymbol{\mu}) - f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu})| \\ + |f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}) - f(s, \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)| \leq K|\phi(s, \boldsymbol{\mu}) - \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*)| + \epsilon,$$
$$|\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq \int_{t_0}^t K |\phi(s, \boldsymbol{\mu}) - \phi(s, \boldsymbol{\mu}^*)| ds + \epsilon(t - t_0).$$
$$(IV.1.6) \quad |\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq \frac{\epsilon}{K} \left( e^{K(r_2 - t_0)} - 1 \right) =: \epsilon c_2,$$

Dans la suite nous choisirons  $\epsilon > 0$  tel que  $\delta_1(\epsilon) \leq b$  et  $c_2\epsilon < a$ , et supposons que  $|\mu - \mu^*| < \delta_1(\epsilon)$ .

$$|\mu - \mu^*| < \delta_1(\epsilon) \leq b,$$



en outre par la (IV.1.6) on a :

$$|\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq \epsilon c_2 < a,$$

puisque  $t_2 > t_0$  on doit forcément avoir  $t_2 = r_2$ .

En résumant nous avons démontré que pour  $t^* \geq t_0$  il existe  $r_2 > t_0$  et (pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit)  $\delta_1 = \delta(\epsilon)$  tels que pour  $t_0 \leq t \leq r_2$  et  $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| < \delta_1$ , la solution  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$  est bien définie (donc le point  $(t, \boldsymbol{\mu})$  appartient à  $T$ ) et de plus  $|\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq c_2 \epsilon$ .

De façon similaire nous pouvons démontrer que pour  $t_0 \geq t^*$ , il existe  $r_1 < t_0$  et (pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit)  $\delta_2(\epsilon)$ , tels que pour  $r_1 \leq t \leq t_0$  et  $|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| < \delta_2$ , la solution  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$  est bien définie (donc le point  $(t, \boldsymbol{\mu})$  appartient à  $T$ ) et de plus  $|\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq c_1 \epsilon$ , pour une certaine constante positive  $c_1$ .

Nous pouvons donc conclure que pour tout  $t^*$  (plus grand ou plus petit que  $t_0$ ) il existe  $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$  et (pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit),  $\delta > 0$  tels que pour

$$|t - t^*| < r \quad \text{et} \quad |\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^*| < \delta,$$

la solution  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$  est bien définie et donc le point  $(t, \boldsymbol{\mu})$  appartient à  $T$  et l'inégalité

$$(IV.1.7) \quad |\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq c\epsilon$$

est vérifiée, avec  $c = \max\{c_1, c_2\}$ . Montrons que cela implique que  $\phi(t, \boldsymbol{\mu})$  est continue au point  $(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$  :

$$|\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)| \leq |\phi(t, \boldsymbol{\mu}) - \phi(t, \boldsymbol{\mu}^*)| + |\phi(t, \boldsymbol{\mu}^*) - \phi(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)|.$$

Soit  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, alors le premier terme est plus petit que  $c\epsilon$ , grâce à l'estimation précédente (IV.1.7), et le deuxième est petit grâce à la continuité de la solution du PdC par rapport au temps.

Le Théorème est ainsi démontré modulo la preuve du Lemme 1.2 qui sera faite dans le prochain paragraphe.

**1.1. Un Lemme technique [Théorème de la comparaison].** Dans ce paragraphe nous montrons le Lemme suivant qui a été utilisé dans la preuve du Théorème 1.1.

LEMME 1.2. *Soit  $u(t)$  une fonction positive et continue sur un intervalle  $[t_0, t_1]$ , qui satisfait, pour tout  $t$  dans le même intervalle, l'inégalité*

$$u(t) \leq \int_{t_0}^t (au(s) + b) ds,$$

*pour des constantes positives  $a$ , et  $b$ . Alors on a l'estimation*

$$u(t) \leq \frac{b}{a} \left( e^{a(t-t_0)} - 1 \right),$$

*pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ .*

Ce Lemme est en fait contenu dans le suivant résultat plus générale, qui sera donc démontré

THÉORÈME 1.3 (Comparaison<sup>1</sup>). *Soient  $f_1(t, x)$  et  $f_2(t, x)$  fonctions continues telles que  $f_1(t, x) < f_2(t, x)$ . Soient  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , les solutions des PdC  $\dot{x} = f_i(t, x)$*

---

<sup>1</sup>Celui qui marche plus doucement, n'arrive pas plus loin ; mais il peut arriver que la vitesse de  $\phi_1$  à un instant donné soit plus grande de la vitesse de  $\phi_2$  au même instant.

avec donnée initiale  $x(t_0) = x_0$ , définies sur l'intervalle  $a < t < b$ . Alors pour  $t \geq t_0$  dans  $(a, b)$  on a  $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$  et pour  $t \leq t_0$  dans  $(a, b)$  on a  $\phi_1(t) \geq \phi_2(t)$

DÉMONSTRATION. Soit  $\theta = \sup\{s : \phi_1(t) \leq \phi_2(t) \text{ pour tout } t_0 \leq t < s\}$ , par hypothèse  $t_0 \leq \theta \leq b$ . Si  $\theta = b$  on a fini, supposons donc que  $\theta < b$ ; par la continuité de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  on a  $\phi_1(\theta) = \phi_2(\theta)$ . Mais en étant solutions de l'EDO les fonctions vérifient

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = f_i(t, \phi_i(t)) \quad \forall t \in (a, b),$$

qui pour  $t = \theta$  nous donne :

$$\frac{d\phi_1(\theta)}{dt} = f_1(\theta, \phi_1(\theta)) < f_2(\theta, \phi_2(\theta)) = \frac{d\phi_2(\theta)}{dt}.$$

Cette relation implique que  $\phi_1(t) < \phi_2(t)$  dans un voisinage droit de  $\theta$ , donc  $\theta$  ne peut pas être le plus grand point où  $\phi_1(t) \leq \phi_2(t)$ . On conclut que  $\theta = b$ .

De la même façon on peut étudier le cas  $t \leq t_0$ . □

Nous allons maintenant montrer pourquoi le Lemme 1.2 suit du Théorème de la confrontation.

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $f_1(x, t) = ax + b$  et  $f_2(x, t) = ax + b + \epsilon$ , avec les constantes  $a$  et  $b$  introduites dans le Lemme 1.2. Alors appelées  $u$ , respectivement  $v$ , les solutions du PdC  $\dot{x} = f_1(x, t)$ , respectivement  $\dot{x} = f_2(x, t)$ , avec donnée initiale  $x(t_0) = 0$ . La fonction  $u$  vérifie donc :

$$u(t) \leq \int_{t_0}^t (au(s) + b) ds$$

mais par le Théorème 1.3 (en étant  $f_1(x, t) < f_2(x, t)$ ) :

$$u(t) \leq v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

avec  $v(t)$  déterminée explicitement :

$$v(t) = \frac{b + \epsilon}{a} \left( e^{a(t-t_0)} - 1 \right),$$

donc

$$u(t) \leq \frac{b + \epsilon}{a} \left( e^{a(t-t_0)} - 1 \right) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Puisque toutes les estimations sont valables pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut passer à la limite  $\epsilon \rightarrow 0^+$  et conclure que :

$$u(t) \leq \frac{b}{a} \left( e^{a(t-t_0)} - 1 \right) \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

## 2. Dépendance continue par rapport aux données initiales

Dans cette section nous allons montrer que la solution d'un PdC dépend de façon continue des données initiales. Considérons une EDO en forme normale scalaire (le cas vectoriel pourra être considéré de façon similaire)

$$(IV.2.1) \quad \dot{x} = f(t, x),$$

où la fonction  $f$  est définie dans l'ouvert  $A \subset \mathbb{R}^2$  et  $y$  est continue avec sa dérivée première par rapport à  $x$ . Pour toute condition initiale  $(\tau, \xi) \in A$ , le PdC :

$$(IV.2.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

a une et une seule *solution maximale*,  $\phi(t, \tau, \xi)$ , définie pour  $t \in (m_1(\tau, \xi), m_2(\tau, \xi))$ , c'est-à-dire la fonction et son domaine de définition dépendent des données initiales. Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  l'ensemble des points  $(t, \tau, \xi)$  pour lesquels la solution  $\phi(t, \tau, \xi)$  est définie. C'est clair que cet ensemble peut être défini par les conditions :

$$(\tau, \xi) \in A \text{ et } t \in (m_1(\tau, \xi), m_2(\tau, \xi)) .$$

On peut donc énoncer le résultat

**THÉORÈME 2.1.** *L'ensemble  $S$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et la fonction  $\phi(t, \tau, \xi)$  est continue sur  $S$ .*

**DÉMONSTRATION.** La preuve de ce Théorème sera obtenue comme Corollaire du Théorème 1.1, nous allons donc montrer comment lier la solution  $\phi(t, \tau, \xi)$  à un problème avec paramètres.

Pour  $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , soit  $s$  un "nouveau temps", défini par  $t = \tau + s$  et soit  $y$  une nouvelle variable  $x = \xi + y$ . Nous voulons lier une solution  $x(t)$  avec une solution dans les nouvelles variables  $y(s)$ ; l'EDO (IV.2.1) peut être réécrite comme :

$$\frac{dy(s)}{ds} = \frac{d}{ds} (x(\tau + s) - \xi) = \frac{dx(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = f(t, x(t)) = f(\tau + s, y(s) + \xi) \equiv g(s, y, \tau, \xi) ,$$

où nous avons utilisé le fait que  $\xi$  est une constante et nous avons introduit la définition de la fonction  $g(s, y, \tau, \xi)$ .

La fonction  $g(s, y, \tau, \xi)$  est définie pourvu que  $(s + \tau, y + \xi) \in A$ , cette condition définit un ensemble  $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^4$ . On peut aisément montrer que  $\tilde{A}$  est ouvert et que  $g$  et  $\partial_y g$  sont continues dans cet ensemble.

La condition initiale  $x(\tau) = \xi$  devient dans les nouvelles variables  $y(0) = 0$ , donc le PdC (IV.2.2) se réécrit comme

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} = g(s, y, \tau, \xi) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

et on observe que maintenant  $\tau$  et  $\xi$  sont considérés comme des *paramètres*. Ce PdC vérifie les hypothèses d'existence et unicité, soit  $y = \psi(s, \tau, \xi)$  la solution maximale qui pour  $s = 0$  passe par le point 0, c'est-à-dire  $\psi(0, \tau, \xi) = 0$ . Par le Théorème 1.1 cette solution (avec données initiales fixées) est définie dans un ensemble ouvert  $T \subset \mathbb{R}^3$  et  $y$  est continue par rapport à ses variables.

Le changement de variables peut être inversé pour donner :

$$\phi(t, \tau, \xi) = \xi + \psi(t - \tau, \tau, \xi) ,$$

on peut vérifier que cette fonction  $\phi(t, \tau, \xi)$  est solution du PdC (IV.2.2), de plus la transformation de  $(s, \tau, \xi)$  à  $(t, \tau, \xi)$  est affine et donc envoie ouverts en ouverts. Si  $S$  est l'image de  $T$  par cette transformation nous pouvons conclure que la solution  $\phi(t, \tau, \xi)$  est définie dans un ouvert et continue sur cet ouvert.  $\square$

Les Théorèmes 1.1 et 2.1 peuvent être réunis dans un seul énoncé qui tient compte des paramètres et des conditions initiales :

**THÉORÈME 2.2** (Dépendance continue de paramètres et données initiales). *Soient  $f(t, x, \mu)$  et  $\partial_x f(t, x, \mu)$  fonctions continues dans un ouvert  $A \subset \mathbb{R}^{2+l}$ , où*

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_l)$  sont des paramètres réels. Soit  $\phi(t, \tau, \xi, \boldsymbol{\mu})$  la solution maximale du PdC

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \boldsymbol{\mu}) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

avec  $(\tau, \xi, \boldsymbol{\mu}) \in A$ . Alors cette solution est définie et continue dans un ouvert de  $\mathbb{R}^{3+l}$  ( $= \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_{\boldsymbol{\mu}}^l$ ).



## CHAPITRE V

### *Quelques solutions explicites.*

#### 1. Introduction

Dans le Chapitre II on a vu que le Problème de Cauchy  $\dot{u} = f(t, u)$ , avec  $u(t_0) = u_0$  a une solution si  $f$  est continue, et de plus la solution est unique si  $f$  est Lipschitz par rapport à la deuxième variable. Mais hélas, le Théorème ne nous donne aucune façon de déterminer explicitement la solution, sauf si  $f$  est *linéaire et indépendante du temps*, on aura donc besoin de “trucs et astuces” qui nous permettent de travailler en beaucoup de cas intéressants.

EXEMPLE 1.1 ( $\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ ). Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  réelle, constante et soit  $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , définie par  $\mathbf{f} : (t, \mathbf{u}) \mapsto A\mathbf{u}$ . On affirme que le PdC :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = A\mathbf{u} \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \end{cases}$$

a une et une seule solution (quelque soit  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ ), de plus cette solution définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  est donnée par :  $\mathbf{u}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{u}_0$ , où  $e^{A(t-t_0)} = \sum_{k \geq 0} A^k(t-t_0)^k/k!$  est l'exponentielle de la matrice  $A(t-t_0)$ .

$\mathbf{f}$  est linéaire et donc vérifie une condition de Lipschitz avec constante  $L = \|A\| = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$ , c'est-à-dire la norme de la matrice  $A$ . Ça suffirait donc de vérifier que  $\mathbf{u}(t)$  est bien une solution pour conclure grâce à l'unicité, mais on va donner une démonstration constructive à l'aide du Théorème de Picard.

On construit la suite :

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \text{ et pour } k \geq 1 : \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{u}_{k-1}(s) ds.$$

Les premiers termes de la suite sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t A\mathbf{u}_0 ds = \mathbf{u}_0 + A\mathbf{u}_0(t-t_0) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_0 + \int_{t_0}^t A[\mathbf{u}_0 + A\mathbf{u}_0(s-t_0)] ds = \mathbf{u}_0 + A\mathbf{u}_0(t-t_0) + A^2\mathbf{u}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

et par récurrence sur  $k$  on peut monter que :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_0 + A\mathbf{u}_0(t-t_0) + A^2\mathbf{u}_0 \frac{t-t_0}{2} + \cdots + A^k\mathbf{u}_0 \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$

Le Théorème de Picard nous dit que la solution du PdC est obtenue comme limite de la suite  $(\mathbf{u}_k)_k$ , donc  $\mathbf{u}(t) = \lim_k \sum_{l=0}^k A^l(t-t_0)^l/l!$ .

## 2. Variations des constantes : cas linéaire, dimension 1.

On va considérer ici un cas particulier d'équation linéaire scalaire, qui sera étudié dans un contexte plus générale dans le Chapitre VI. Soit donc l'équation :

$$(V.2.1) \quad y' = a(x)y + b(x),$$

où les fonctions  $a$  et  $b$  sont continues et définies sur un intervalle  $I$  (qui peut coïncider aussi avec  $\mathbb{R}$  tout entier). Les hypothèses du Théorème II.1.2 sont vérifiées :

- (1)  $f(x, y) = a(x)y + b(x)$  est continue dans  $I \times \mathbb{R}$ , puisque  $a$  et  $b$  le sont ;
- (2)  $f(x, y) = a(x)y + b(x)$  est Lipschitz par rapport à la variable  $y$ , avec constante  $L = \max_{x \in I} |a(x)|$  :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |a(x)||y_1 - y_2| \leq \max_{x \in I} |a(x)| |y_1 - y_2|;$$

- (3) pour tout  $J = (\alpha, \beta)$ , intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , il existe  $M = L \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \max_{x \in I} |b(x)|$ , tel que  $|f(x, y)| \leq M$  :

$$|f(x, y)| \leq |a(x)||y| + |b(x)| \leq L \max\{|\alpha|, |\beta|\} + \max_{x \in I} |b(x)| = M.$$

On a donc existence et unicité pour le PdC avec donnée initiale dans  $I \times J$ . Nous allons maintenant construire une solution, qui sera donc la seule solution de l'équation différentielle.

L'équation (V.2.1) n'est pas homogène à cause du terme  $b(x)$ , ignorons-le pour le moment et considérons l'équation homogène associée :

$$y' = a(x)y,$$

il est immédiat de montrer (vérifier) que si  $A(x) = \int_{x_0}^x a(\xi) d\xi$  alors  $y_{hom}(x) = e^{A(x)}y_0$  est sa solution avec donnée initiale  $y(x_0) = y_0$ .

Nous allons chercher la solution de l'équation (V.2.1) dans la forme  $y(x) = e^{A(x)}v(x)$ , où  $v$  est une fonction inconnue qui sera déterminée en imposant que  $y(x)$  vérifie (V.2.1) :

$$a(x)y + b(x) = y' = v \frac{d}{dx} e^{A(x)} + e^{A(x)}v' = va(x)e^{A(x)} + e^{A(x)}v',$$

donc  $v$  doit résoudre :

$$v' = b(x)e^{-A(x)}.$$

La solution générale de (V.2.1) est :

$$y(x) = e^{A(x)} \left( \int_{x_0}^x b(\xi) e^{-A(\xi)} d\xi + c \right),$$

avec  $c$  constante arbitraire à déterminer pour satisfaire la condition initiale.

La méthode doit son nom au fait que la solution a été trouvée en "variant la constante  $y_0$  de la solution homogène".

## 3. Variables Séparables.

Le concept de solution, comme d'ailleurs de fonction, a changé dans le temps ; dans un premier temps déterminer une solution signifiait trouver une fonction composée en partant de polynômes, exponentielles et logarithmes. Plus tard on a admis dans le rôle de solution acceptable aussi les intégrales de polynômes, exponentielles et logarithmes, cela a été un gros pas puisque généralement on ne sait pas intégrer ces fonctions et donc la solution restait quelque peu cachée.

Pour cette raison quand une EDO peut être résolue en terme d'intégrale de fonctions simples (polynômes, exponentielles et logarithmes), on dira *par quadrature*, on peut se considérer heureux et croire avoir une solution explicite. Cela arrive quand l'EDO scalaire du premier ordre est à *variables séparables*, c'est-à-dire quand

$$f(t, u) = g(t)h(u).$$

La solution de  $\dot{u} = g(t)h(u)$  peut être obtenue comme suit, s'il existe un point  $\bar{u}$  tel que  $h(\bar{u}) = 0$  alors la fonction  $u(t) = \bar{u}$  est une solution <sup>1</sup>. Autrement soit  $G(t) = \int^t g(s) ds$  une primitive de  $g$  et  $W(u) = \int^x 1/h(x) dx$  une primitive de  $1/h$ , alors en divisant par  $h(u)$  l'EDO et en intégrant par rapport à  $t$  on obtient :

$$\int^t \frac{\dot{u}(s)}{h(u(s))} ds = \int^t g(s) ds,$$

dans la première intégrale on peut changer la variable d'intégration de  $s$  à  $u$  et donc la solution en forme implicite :

$$G(t) = \int^{u(t)} \frac{1}{h(u)} du = W(u(t)) + c,$$

où la constante  $c$  sera fixée par la condition initiale :  $c = W(u_0) - G(t_0)$ . Si de plus  $W$  est inversible on pourra écrire :

$$u(t) = W^{-1}(G(t) + W(u_0) - G(t_0)),$$

où nous avons noté par  $W^{-1}$  la fonction *inverse* ou *réci-proque* de  $W$ .

**3.1. Attentions : tournants dangereux !** Il faut faire très attention quand on inverse la fonction  $W$  et on détermine une solution explicite, on peut vite se tromper comme l'exemple suivant nous montre.

EXEMPLE 3.1. On considère le PdC

$$\begin{cases} y' = \frac{1+2x}{\cos y} \\ y(0) = \pi. \end{cases}$$

Avec les notations précédentes  $h(y) = 1/\cos y$ ,  $g(x) = 1 + 2x$  et d'après ce qu'on vient de dire si  $W(y) = \int^y 1/h(y) dy = \sin y$  et  $G(x) = \int^x g(x) dx = x + x^2$ , une solution est donnée en forme implicite par :

$$\sin y(x) = x + x^2 + c,$$

et pour satisfaire la condition initiale on pose :  $c = 0$ .

On voudrait rendre explicite cette relation à l'aide des fonctions trigonométriques inverse et on serait tenté d'écrire :

$$y(x) = \arcsin(x + x^2),$$

mais hélas  $y(0) = \arcsin(0) = 0 \neq \pi$  : la condition initiale n'est plus vérifiée. Le problème est que la fonction  $\sin$  n'est pas globalement inversible et  $\arcsin$  est son inverse seulement dans  $[-\pi/2, \pi/2]$ , nous voulons par contre inverser le  $\sin$  dans un voisinage de  $\pi$  (condition initiale), on va donc poser  $z = y - \pi$  et la solution implicite devient :

$$x + x^2 = \sin(z(x) + \pi) = -\sin z(x),$$

---

<sup>1</sup>Si on doit résoudre le PdC  $\dot{u} = g(t)h(u)$  avec  $u(t_0) = u_0$ , alors si  $u_0 \neq \bar{u}$  le PdC n'a pas de solution. Autrement dit le PdC a solution seulement pour les données initiales  $u(t_0) = u_0$  telles que  $h(u_0) = 0$ .



où nous avons utilisé les propriétés de la fonction  $\sin$  ; on peut finalement inverser la fonction  $\sin$  dans un voisinage de  $\pi$  et on obtient :

$$z(x) = -\arcsin(x + x^2),$$

et en retournant à la variable initiale :

$$y(x) = \pi - \arcsin(x + x^2).$$

Nous pouvons vérifier que,  $y(x)$  est bien une solution <sup>2</sup> :

$$y'(x) = -\frac{1+2x}{\sqrt{1-(x+x^2)^2}} = -\frac{1+2x}{\sqrt{1-[\sin(\pi-y(x))]^2}} = \frac{1+2x}{\cos y(x)},$$

et  $y(0) = \pi$ .

**3.2. Cas à reconduire à Variables Séparables.** On considère l'équation :

$$y' = f(ax + by + c),$$

avec  $b \neq 0$  (autrement on intègre directement), soit  $u = ax + by + c$  ; dans cette nouvelle variable l'équation peut être réécrite comme :

$$u' = a + by'(x) = a + bf(u),$$

qui est à variables séparables  $g(t) \equiv 1$  et  $h(u) = a + bf(u)$ .

EXEMPLE 3.2. Résoudre l'équation :

$$y' = \sin(x + y + 3).$$

On pose  $u = x + y + 3$  et on se ramène à étudier :

$$u' = 1 + \sin u,$$

qui peut être résolue comme suit :

$$x + c = \int \frac{du}{1 + \sin u} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t},$$

où nous avons utilisé le changement de variables (ou bien truc trigonométrique)  $\sin u = 2t/(1+t^2)$  avec  $t = \tan u/2$ , donc  $\cos u = (1-t^2)/(1+t^2)$  et

$$\frac{du}{1 + \sin u} = \frac{du}{1 + \sin u} \frac{1}{\cos u} \frac{d}{dt} \left( \frac{2t}{1+t^2} \right) dt = 2 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{1+t^2}{(1+t)^2} dt.$$

Finalement la solution est  $x + c = -2/(1 + \tan \frac{u}{2})$ , qui peut être inversée pour donner :

$$u = -2 \arctan \left( 1 + \frac{2}{x+c} \right) \Rightarrow y = -2 \arctan \left( 1 + \frac{2}{x+c} \right) - x - 3.$$

---

<sup>2</sup>Nous rappelons ici la règle de dérivation pour la fonction inverse, soit  $v_0 = f(u_0)$  alors  $D_v f^{-1}(v_0) = 1/D_u f(u_0)$ . Montrons que Dans notre  $D_v \arcsin(v_0) = 1/\sqrt{1-v_0^2}$  ; en fait  $\arcsin v$  est la fonction inverse de  $\sin u$  restreint à  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Soit  $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$  et  $v_0 = \sin u_0$ , alors par la règle générale on a  $D_v \arcsin(v_0) = 1/D_u \sin(u_0) = 1/\cos u_0$ , mais  $\cos u_0$  est positif car  $u_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ , donc  $\cos u_0 = \sqrt{1 - \sin^2 u_0} = \sqrt{1 - v_0^2}$ .

**3.3. Équations Homogènes.** On appelle homogène une équation de la forme :

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) ;$$

si on pose  $y = ux$  alors l'équation dans la nouvelle variable  $u$  est à variables séparables, puisque  $y' = u'x + u$ , on a :

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} ,$$

EXEMPLE 3.3. Résoudre l'équation

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} .$$

On remarque que

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{u} + u ,$$

avec  $y = ux$ , donc l'équation peut être réécrite comme

$$u' = \frac{1}{xu} ,$$

dont la solution (en forme implicite) est

$$\frac{u^2}{2} = \log |x| + c ,$$

d'où :  $y = x\sqrt{2(\log |x| + c)}$ .

#### 4. Équation de Bernoulli

Une équation du premier ordre de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha ,$$

(où on peut supposer  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha \neq 1$ , puisque autrement on retombe sur un cas déjà étudié : cas linéaire) est dite de *Bernoulli*.

Une façon de les résoudre est de faire le changement des variables suivant :  $y = u^{1/(1-\alpha)}$  ; on a donc :

$$y' = \frac{1}{1-\alpha} u^{\alpha/(1-\alpha)} u' ,$$

et finalement :

$$\frac{1}{1-\alpha} u^{\alpha/(1-\alpha)} u' = -a(x)u^{1/(1-\alpha)} + b(x)u^{\alpha/(1-\alpha)} \Rightarrow u' = -(1-\alpha)a(x)u + (1-\alpha)b(x) .$$

Cette équation est linéaire et la forme générale de sa solution est :

$$u(x) = e^{-(1-\alpha)A(x)} \phi(x) ,$$

où

$$A(x) = \int^x a(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad \phi(x) = \int^x (1-\alpha)b(\xi)e^{(1-\alpha)A(\xi)} d\xi .$$

Une *deuxième* façon de résoudre une équation de Bernoulli est d'introduire deux fonctions inconnues  $u$  et  $v$  et de chercher la solution de la forme  $y = uv$ , cela nous permet de récrire l'équation comme

$$u(v' + a(x)v) + vu' = b(x)u^\alpha v^\alpha .$$

On choisit  $v$  comme solution de l'équation  $v' + a(x)v = 0$  et donc  $u$  doit résoudre  $u' = b(x)u^\alpha v^{\alpha-1}$ . Mais alors

$$v(x) = e^{-\int^x a(\xi) d\xi} \quad \text{et} \quad u' = b(x)u^\alpha e^{-(\alpha-1)\int^x a(\xi) d\xi},$$

et l'équation pour  $u$  est à variables séparables.

EXEMPLE 4.1. Résoudre l'équation :

$$y' - \frac{y}{x} = y^3 \sin x,$$

on remarque qu'elle est de Bernoulli avec  $a(x) = 1/x$ ,  $b(x) = \sin x$  et  $\alpha = 3$ .

Première méthode. On pose  $y = u^{-1/2}$  et donc :

$$u' = -2\frac{u}{x} - 2\sin x;$$

l'équation homogène associée ( $u' + 2u/x = 0$ ) admet comme solution  $u(x) = c/x^2$ , avec la méthode des variation des constantes la solution générale est :

$$u(x) = \frac{\phi(x)}{x^2},$$

avec  $\phi(x) = \int^x -2\xi \sin \xi d\xi$ . Cette intégrale peut être explicitement calculée avec la formule d'intégration par parties<sup>3</sup> :

$$\phi(x) = 2x^2 \cos x - 4x \sin x - 4 \cos x + c,$$

$c$  constante arbitraire. On conclut que la solution de l'équation de Bernoulli est

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cos x - \frac{4}{x} \sin x - \frac{4}{x^2} \cos x + \frac{c}{x^2}}}.$$

Deuxième méthode. On pose  $y = uv$  avec  $v$  solution de  $v' - v/x = 0$  et donc  $u$  doit résoudre  $u' = u^3 v^2 \sin x$ . La première équation a solution  $v(x) = ax$ , avec  $a \neq 0$  constante arbitraire, pour la deuxième on a :

$$\frac{u'}{u^3} = a^2 x^2 \sin x,$$

d'où (variables séparables) :

$$-\frac{1}{2u^2} = a^2 (-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c),$$

$c$  constante arbitraire, et finalement la solution  $y(x)$  est :

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{xa}{\sqrt{a^2 (2x^2 \cos x - 4x \sin x - 4 \cos x + c)}},$$

qui après simplification nous donne à nouveau la solution déjà trouvée.

---

<sup>3</sup>La formule d'intégration par parties dit que  $\int f'g = fg - \int fg'$ .

### 5. Méthode de la différentielle exacte et Intégrales premières

On considère une équation différentielle de la forme :

$$y' = \frac{f(x, y)}{g(x, y)},$$

avec les fonctions  $f$  et  $g$  définies et régulières dans un ouvert  $A \subset \mathbb{R}^2$ , où  $g$  ne s'annule pas. On suppose qu'il existe une fonction  $F(x, y)$  définie et régulière sur  $A$  telle que :

$$f(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y),$$

pour tout point  $(x, y) \in A$ . Si ça s'avère on dira que l'équation admet une *différentielle exacte*. On affirme que toutes les solutions sont de la forme  $F(x, y(x)) = c$ , avec  $c$  constante arbitraire, on dira aussi qu'elles sont les *lignes de niveau* de  $F$ .

Si  $y(x)$  est une solution de l'EDO, alors pour tout  $x$  dans l'intervalle de définition on a :

$$y'(x) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = -\frac{\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)},$$

c'est-à-dire :

$$0 = \partial_y F(x, y)y'(x) + \partial_x F(x, y) = \frac{d}{dx}F(x, y),$$

comme on peut constater en utilisant la règle de dérivation de fonction composée ; mais alors la fonction  $F$  est constante sur l'orbite, et donc il existe une constante  $c$  telle que :  $F(x, y(x)) = c$  pour tout  $x$  dans l'intervalle de définition.

Si maintenant  $y(x)$  est une courbe solution de  $F(x, y(x)) = c$  pour une certaine constante  $c$  et pour tout  $x$  dans un certain intervalle, alors en dérivant par rapport à  $x$  on a (encore règle de dérivation de fonction composée) :

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x),$$

qui nous donne

$$y'(x) = -\frac{\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)},$$

donc la courbe solution  $y(x)$  est aussi une solution de l'équation différentielle.

La fonction  $F(x, y)$  est aussi appelée *intégrale première*. En général si on a une EDO  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , avec  $\mathbf{f}$  "régulière" sur un ouvert  $A$ , toute fonction  $u$  définie et régulière dans  $G$  ouvert contenu dans  $A$ , telle que si  $\phi(t)$  est une solution de l'EDO, dont la trajectoire est complètement contenue dans  $G$ , alors  $u(\phi(t))$  est une constante qui dépend de la solution  $\phi(t)$  et pas de  $t$  (donc on a  $u(\phi(t)) = c$  constante). On peut montrer que une fonction est une intégrale première si et seulement si elle est solution de

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} f_j(x) = 0,$$

où nous avons utilisé la notation  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ . On peut vérifier sans peine que cette équation est équivalente à

$$\left. \frac{du(x)}{dt} \right|_{f \text{ lot}} = 0,$$

où la dérivée doit être évaluée “sur le flot” de l’EDO, c’est-à-dire la dérivée de  $x$  par rapport à  $t$  est donnée par l’EDO.

## 6. Oscillateur harmonique

Dans cette section nous allons étudier un système très important et fondamentale dans beaucoup d’applications : l’*oscillateur harmonique*. Il s’agit du “plus simple” système qui produit des oscillations, c’est-à-dire des mouvements périodiques dans le temps. Vu son importance nous reverrons sur cet exemple dans le Chapitre VI.

Il peut se présenter sous forme d’équation du deuxième ordre :

$$(V.6.1) \quad \ddot{x} = -\omega^2 x,$$

où  $\omega$  est un réel positif, que l’on verra représenter la fréquence des oscillations périodiques et le double point représente la dérivée seconde par rapport au temps. Nous avons aussi vu que une équation du second ordre peut être réécrite comme une équation du premier ordre mais vectorielle. Plus précisément nous allons introduire le vecteur  $\vec{x} = (x_1, x_2)^T$ , défini par :

$$x_1 = x \text{ et } x_2 = \dot{x},$$

alors l’équation (V.6.1) permet d’écrire la relation suivante entre les composantes du vecteur  $\vec{x}$  :

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \text{ et } \dot{x}_2 = \ddot{x} = -\omega^2 x = -\omega^2 x_1.$$

Sous forme vectorielle nous pouvons donc écrire :

$$(V.6.2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega^2 x_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

où la dernière égalité définit la matrice  $A$ .

Dans l’exemple 1.1 nous avons vu que la solution de (V.6.2) est donnée par :

$$(V.6.3) \quad \vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0),$$

où  $\vec{x}(t_0)$  est la donnée du vecteur à un certain temps  $t_0$ . Cette solution peut être mise dans une forme plus explicite en calculant l’exponentielle de la matrice  $A$ . Pour faire cela remarquons les faits suivants :

$$(V.6.4) \quad A^{2m} = (-\omega^2)^m \mathbb{I} \text{ et } A^{2m+1} = (-\omega^2)^m A \quad \forall m > 0;$$

la démonstration est triviale et laissée en exercice.

Mais alors par définition d’exponentielle d’une matrice nous avons :

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{l \geq 0} \frac{A^l}{l!} = \sum_{l \text{ paire}} \frac{A^l}{l!} + \sum_{l \text{ impaire}} \frac{A^l}{l!} \\ &= \sum_{m=0} \frac{A^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0} \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!}, \end{aligned}$$

et en utilisant (V.6.4) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{m=0} \frac{A^{2m} t^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0} \frac{A^{2m+1} t^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0} \frac{(-\omega^2 t^2)^m}{(2m)!} \mathbb{I} + \sum_{m=0} \frac{(-\omega^2 t^2)^m t}{(2m+1)!} A \\ &= \sum_{m=0} \frac{(-1)^m (\omega t)^{2m}}{(2m)!} \mathbb{I} + \frac{1}{\omega} \sum_{m=0} \frac{(-1)^m (\omega t)^{2m+1}}{(2m+1)!} A = \cos(\omega t) \mathbb{I} + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) A, \end{aligned}$$

et finalement

$$(V.6.5) \quad \vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t-t_0)) & \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-t_0)) \\ -\omega \sin(\omega(t-t_0)) & \cos(\omega(t-t_0)) \end{pmatrix} \vec{x}(t_0).$$

Dans les variables initiales nous avons donc :

$$(V.6.6) \quad x = \cos(\omega(t-t_0))x(t_0) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t-t_0))\dot{x}(t_0).$$

Rappelons qu'il faut donner la valeur de la fonction en un point  $t_0$  mais aussi de sa dérivée (dans le même point) car il s'agit d'une équation du deuxième ordre. La vérification que (V.6.6) est une solution est laissée en exercice.

On observe que la solution est périodique, après un temps  $T = 2\pi/\omega$ , dit *période* la solution repasse par la valeur du départ :

$$\begin{aligned} x(t + \frac{2\pi}{\omega}) &= \cos(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega} - t_0))x(t_0) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega} - t_0))\dot{x}(t_0) \\ &= \cos(\omega(t - t_0) + 2\pi)x(t_0) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega(t - t_0) + 2\pi)\dot{x}(t_0) \\ (V.6.7) \quad &= x(t). \end{aligned}$$

Le nombre  $\omega = T/(2\pi)$  est appelé *fréquence* du mouvement.



## *Équations Différentielles Ordinaires Linéaires.*

### 1. EDO Linéaires : préliminaires.

Dans ce Chapitre nous étudierons en détail le cas des *EDO linéaires*, le sujet n'est pas complètement neuf puisque nous avons déjà eu occasion de voir des EDO linéaires, le but de ce Chapitre est de déterminer des formules explicites pour les solutions des EDO linéaires.

L'intérêt pour ces types d'équations vient du fait qu'on puisse déterminer une solution explicite mais aussi du fait que l'approximation linéaire d'une EDO non-linéaire peut nous donner des informations sur le comportement de la solution pour le cas non-linéaire.

Une EDO linéaire vectorielle du premier ordre en forme normale, est une équation du type :

$$(VI.1.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x},$$

où  $\mathbf{x}$  appartient à  $\mathbb{R}^n$  et  $A(t)$  est une matrice  $n \times n$  dont les composantes sont des fonctions définies dans  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle ouvert. Nous avons aussi déjà remarqué que toute EDO scalaire d'ordre  $n$  homogène <sup>1</sup>

$$(VI.1.2) \quad u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)u = 0,$$

où  $u$  est une fonction à valeur dans  $\mathbb{R}$ ,  $(a_j(t))_{j=0,\dots,n-1}$  sont des fonctions définies dans un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , peut être réécrite comme EDO vectorielle linéaire (VI.1.1) (dimension = ordre), avec  $\mathbf{x} = (u, u^{(1)}, \dots, u^{(n-1)})$  et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons généraliser les équation sous étude, en considérant le cas non homogène (scalaire ou vectoriel) :

$$(VI.1.3) \quad \dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad \text{et} \quad u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)u = f(t).$$

Si  $A(t)$  et  $\mathbf{f}(t)$  (ou bien  $(a_j(t))_{j=0,\dots,n-1}$  et  $f(t)$ ) sont définies et *continues* sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , alors on peut aisément montrer que on peut appliquer le Théorème de Picard II.1.2, et donc on a existence et unicité des solutions pour tout

---

<sup>1</sup>Remarquons que l'écriture plus générale  $a_n(t)u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_0(t)u = 0$  donne lieu à des problèmes si il existe  $t_0 \in I$  tel que  $a_n(t_0) = 0$ , puisque dans ce cas l'ordre de l'EDO change. Si par ailleurs  $a_n(t) \neq 0$  pour tout  $t$  nous pouvons diviser par  $a_n(t)$  et donc se ramener au cas (VI.1.2).



PdC associé, et grâce au Théorème III.2.7 on sait que la solution maximale est définie sur tout l'intervalle  $I$ .

REMARQUE 1.1. Soit  $L_a : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}$  l'opérateur qui à toute fonction  $n$ -fois continûment différentiable associe la fonction :

$$(VI.1.4) \quad L_a(u) = u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)u,$$

avec cette définition l'EDO scalaire d'ordre  $n$  peut être réécrite comme :

$$L_a(u) = 0 \text{ si homogène et } L_a(u) = f \text{ autrement,}$$

on observe de plus que l'opérateur  $L_a$  est linéaire (d'où le nom EDO linéaire), c'est-à-dire :

$$L_a(\lambda u + \mu v) = \lambda L_a(u) + \mu L_a(v),$$

pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  réels.

Si  $u$  et  $v$  sont deux solutions de (VI.1.3) :

$$L_a(u) = f \quad \text{et} \quad L_a(v) = f,$$

alors la fonction  $w = u - v$  est solution de l'EDO linéaire scalaire homogène :

$$L_a(u - v) = 0.$$

En d'autres termes si  $u_f$  est une solution de l'EDO linéaire non homogène alors l'espace de toutes les solutions,  $\mathcal{V}_f$ , est décrit par :

$$w \in \mathcal{V}_f \Leftrightarrow w = u_f + u \text{ avec } L_a(u) = 0.$$

La remarque précédente nous dit que pour déterminer toutes les solutions de (VI.1.3) "ça suffit" de trouver une solution particulière  $u_{part}$  et de lui rajouter toutes les solutions de l'EDO homogène, c'est pour cela que nous allons démarrer notre étude avec la caractérisation de  $\mathcal{V}_0$ . Si nous notons  $\mathcal{V}_f$  l'ensemble des solutions de (VI.1.3) alors

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_0 + u_{part}.$$

EXEMPLE 1.2. Considérons l'EDO

$$(VI.1.5) \quad \dot{u} + \frac{u}{t} = e^t;$$

la solution de l'EDO homogène ( $\dot{u} + u/t = 0$ ) est  $u_0(t) = c/t$  avec  $c$  constante arbitraire. La solution générale de (VI.1.5) est donc  $u_{gen}(t) = u_0(t) + u_{part}(t)$ , où  $u_{part}(t)$  est une solution particulière de (VI.1.5). On peut vérifier que  $u_{part}(t) = (1 - 1/t)e^t$  est une solution et donc la solution générale de (VI.1.5) est

$$u_{gen}(t) = c/t + (1 - 1/t)e^t.$$

THÉORÈME 1.3 (caractérisation de  $\mathcal{V}_0$ ). L'espace des solutions de l'EDO linéaire scalaire d'ordre  $n$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

DÉMONSTRATION. Le fait que  $\mathcal{V}_0$  soit un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (ou bien sur  $\mathbb{C}$  si on travaille avec des fonctions à valeurs complexes) suit tout de suite de la linéarité de l'opérateur  $L_a$ , si  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{V}_0$ , alors, pour tout  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$L_a(\lambda u + \mu v) = L_a(\lambda u) + L_a(\mu v) = 0 \Rightarrow \lambda u + \mu v \in \mathcal{V}_0.$$

Pour montrer que la dimension est  $n$  il faut prouver l'existence de  $n$  vecteurs dans  $\mathcal{V}_0$  linéairement indépendants et après montrer que tout élément de  $\mathcal{V}_0$  peut être écrit comme combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{R}$  des  $n$  vecteurs trouvés.

On considère les  $n$  PdC

$$\begin{cases} L_a(u) = 0 \\ u(t_0) = 1 \\ u^{(1)}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_a(u) = 0 \\ u(t_0) = 0 \\ u^{(1)}(t_0) = 1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} L_a(u) = 0 \\ u(t_0) = 0 \\ u^{(1)}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

pour un certain  $t_0 \in I$ , et soient  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$  les respectives solutions. Montrons que ces fonctions sont linéairement indépendantes. Si elles n'étaient pas linéairement indépendantes il y aurait une combinaison linéaire

$$u(t) = \lambda_1 u_1(t) + \dots + \lambda_n u_n(t),$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous égales à zéro tels que  $u(t) \equiv 0$  (la fonction nulle est l'élément zéro de  $\mathcal{V}_0$ ). Puisque  $\mathcal{V}_0$  est un espace vectoriel  $u(t)$  appartient à  $\mathcal{V}_0$ , donc elle est une solution  $L_a(u) = 0$ , de plus elle est solution du PdC

$$L_a(u) = 0, u(t_0) = \lambda_1, u^{(1)}(t_0) = \lambda_2, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = \lambda_n,$$

comme on peut directement vérifier. Mais par l'unicité du Théorème de Picard la fonction nulle est solution si et seulement si tous les  $\lambda_j$  sont eux à zéro.

Montrons maintenant que les solutions  $(u(t)_j)_{j=1, \dots, n}$  engendrent  $\mathcal{V}_0$ , c'est-à-dire tout  $v \in \mathcal{V}_0$  peut être écrit comme combinaison linéaire des  $(u(t)_j)_{j=1, \dots, n}$ . La fonction  $v$  vérifie le PdC

$$L_a(v) = 0, v(t_0) = v(t_0), v^{(1)}(t_0) = v^{(1)}(t_0), \dots, v^{(n-1)}(t_0) = v^{(n-1)}(t_0),$$

Définissons la fonction

$$u(t) = v(t_0)u_1(t) + v^{(1)}(t_0)u_2(t) + \dots + v^{(n-1)}(t_0)u_n(t),$$

par la linéarité  $u$  est une solution,  $L_a(u) = 0$ , de plus elle vérifie le PdC :

$$L_a(u) = 0, u(t_0) = v(t_0), u^{(1)}(t_0) = v^{(1)}(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0) = v^{(n-1)}(t_0).$$

Qui est le même PdC vérifié par  $v$  et donc à cause de l'unicité nous pouvons conclure que  $v(t) = u(t)$ , c'est-à-dire si on pose  $\mu_1 = v(t_0), \dots, \mu_n = v^{(n-1)}(t_0)$ , alors on a trouvé la combinaison linéaire

$$v(t) = \mu_1 u_1(t) + \dots + \mu_n u_n(t) \quad \forall t \in I.$$

□

Un étude complet des EDO linéaires sera donc fait une fois nous aurons caractérisé l'espace vectoriel  $\mathcal{V}_0$  et que nous aurons déterminé des procédures pour trouver les solutions particulières.

Nous allons considérer d'abord le cas de EDO linéaires à *coefficients constants*, c'est-à-dire les fonctions  $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$  sont des constantes.

Considérons donc l'EDO linéaire non homogène

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_0 u = f,$$

où  $a_0, \dots, a_{n-1}$  sont des nombres réels non tous zéro <sup>2</sup>. Dans la prochaine section nous étudierons les trois étapes suivantes :

- (1) déterminer une base de  $\mathcal{V}_0$  ;

<sup>2</sup>On peut toujours normaliser à 1 un coefficient de l'EDO, nous avons choisi celui d'ordre  $n$ .

- (2) déterminer  $\mathcal{V}_f$  pour certaines fonctions  $f$  “simples” ;
- (3) décrire une méthode générale pour déterminer  $\mathcal{V}_f$ .

## 2. EDO linéaires à coefficients constants homogènes

Dans cette section nous considérons une EDO linéaire à coefficients constants homogène, nous montrerons que à chaque EDO de ce type on peut associer un polynôme qui va nous permettre de résoudre à la question du point 1). Avant de démontrer ce résultat nous avons besoin d’un petit rappel d’algèbre et quelques définitions.

**2.1. Rappel d’algèbre.** Une algèbre sur un corps  $\mathbb{K}$  (pour nous  $\mathbb{R}$  ou bien  $\mathbb{C}$ ) est un espace vectoriel  $V$  sur  $\mathbb{K}$  sur le quel nous avons défini un *produit*, noté  $x \cdot y$ , de vecteurs avec les propriétés suivantes, pour tout  $x, y, z \in V$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  alors :

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z \\ \alpha(x \cdot y) &= (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y), \end{aligned}$$

si de plus on a  $x \cdot y = y \cdot x$  alors on dira que l’algèbre est *commutative*.

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux algèbres et  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , on dira que  $\Phi$  est un *isomorphisme de algèbres* si

- $\Phi$  est un isomorphisme d’espaces vectoriels ( $\Phi$  est injective et surjective,  $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$  et  $\Phi(\alpha x) = \alpha \Phi(x)$ ) ;
- $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$  pour tout  $x, y \in \mathcal{A}$ .

**2.2. Opérateur de dérivation.** Considérons l’opérateur de dérivation  $D : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ , avec  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle ouvert, défini par  $Du := \frac{du}{dt}$ . Introduisons aussi la notation  $D^n := D \circ D^{n-1}$ , c’est-à dire  $D^n u = \frac{d^n u}{dt^n}$ .

Considérons l’ensemble des opérateurs linéaires  $\mathcal{D}$  :

(VI.2.1)

$$\mathcal{D} = \left\{ L_a \mid L_a : \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}), L_a = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si  $L_a$  et  $L_b$  son deux éléments de  $\mathcal{D}$ ,  $L_a = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0$  et  $L_b = D^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots + b_0$ , alors on peut définir la *somme* comme ( $n > m$ ) :

$$L_a + L_b := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_{m+1}D^{m+1} + (a_m + b_m)D^m + \dots + (a_0 + b_0),$$

et le *produit* comme *convolution des opérateurs* :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) & \xrightarrow{B} & \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \\ & \searrow A \circ B & \downarrow A \\ & & \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \end{array}$$

Par exemple  $(D - a) \circ (D - b) = D^2 - a(a + b)D + ab$ , puisque pour tout fonction  $u \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$  nous avons :

$$L_a \circ L_b u(t) = L_a \left( u^{(1)}(t) - bu(t) \right) = u^{(2)}(t) - (a + b)u^{(1)}(t) + abu(t).$$

On peut vérifier que  $\mathcal{D}$  est une *algèbre commutative*, puisque les dérivées commutent.

Soit  $\mathcal{P}[\alpha]$  l'espace vectoriel (vérifiez-le) des polynômes dans la variable  $\alpha$  avec coefficients complexes. On a (vérifiez-le) que  $\mathcal{P}[\alpha]$  est une *algèbre commutative*, où le produit est le produit standard entre polynômes.

Nous pouvons finalement énoncer le

**THÉORÈME 2.1** (Polynôme caractéristique). *Les algèbres commutatives  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{P}[\alpha]$  sont isomorphes et l'application  $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}[\alpha]$ , définie par*

$$(VI.2.2) \quad \Phi(L_a) = \Phi(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0,$$

*est un isomorphisme de algèbres.  $\Phi(L_a)$  est appelé polynôme caractéristique (de l'EDO linéaire à coefficients constants).*

**DÉMONSTRATION.** Montrons d'abord que  $\Phi$  est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

Soient  $L_a$  et  $L_b$  deux opérateurs de  $\mathcal{D}$  tels que  $L_a \neq L_b$ . Si  $\deg L_a \neq \deg L_b$  alors  $\Phi(L_a)$  est un polynôme de degré différent de celui de  $\Phi(L_b)$  et donc  $\Phi(L_a) \neq \Phi(L_b)$ ; si  $\deg L_a = \deg L_b$  alors au moins un des coefficients  $a_0, \dots, a_{n-1}$  ( $n = \deg L_a$ ) est différent du correspondant coefficient dans  $L_b$  : il existe  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $a_j \neq b_j$ . Alors les polynômes  $\Phi(L_a)$  et  $\Phi(L_b)$  diffèrent dans un coefficient et donc ils sont différents (remarquez que les polynômes sont *normalisés* en posant le coefficient du degré plus grand égal à un). Donc  $\Phi$  est injectif.

Il est surjectif puisque quelque soit le polynôme  $p(\alpha) \in \mathcal{P}[\alpha]$ ,  $\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$ , alors l'opérateur  $L_a = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$  est bien dans  $\mathcal{D}$  et  $\Phi(L_a) = p(\alpha)$ .

Finalement pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  il est clair que

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda L_a) &= \Phi(\lambda D^n + \lambda a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + \lambda a_0) \\ &= \lambda \alpha^n + \lambda a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + \lambda a_0 = \lambda (\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0) \\ &= \lambda \Phi(L_a), \end{aligned}$$

et donc  $\Phi$  est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

Pour montrer qu'il est isomorphisme entre algèbres il faut contrôler son action par rapport au produit dans les deux algèbres. Considérons d'abord deux opérateurs du premier ordre,  $L_a = D - a$  et  $L_b = D - b$ , alors  $\Phi(L_a) = \alpha - a$  et  $\Phi(L_b) = \alpha - b$ . Nous avons déjà montré que  $L_a \circ L_b = D^2 - (a + b)D + ab$  et donc  $\Phi(L_a \circ L_b) = \alpha^2 - (a + b)\alpha + ab$ , finalement :

$$\Phi(L_a \circ L_b) = \alpha^2 - (a + b)\alpha + ab = (\alpha - a)(\alpha - b) = \Phi(L_a)\Phi(L_b).$$

En utilisant le Théorème fondamentale de l'algèbre (tout polynôme se factorise de façon unique en un produit de polynômes du premier ordre) on peut avec une démonstration par induction sur l'ordre des opérateurs, montrer que  $\Phi$  se "comporte bien" par rapport aux produits.  $\square$

REMARQUE 2.2 (Factorisation). *Puisque tout polynôme peut être factorisé de façon unique en polynômes du premier degré, grâce à l'isomorphisme  $\Phi$  une factorisation similaire est obtenue pour les opérateurs.*

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 \Rightarrow (\alpha - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\alpha - \lambda_k)^{m_k},$$

*pour des opportuns entiers  $k \leq n$ ,  $m_1 + \cdots + m_k = n$  et des opportuns nombres complexes  $(\lambda_j)_{j=1,\dots,k}$ , racines du polynôme de multiplicités  $(m_j)_{j=1,\dots,k}$ . Pour l'opérateur  $L_a = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0$  on a la factorisation*

$$L_a = (D - \lambda_1)^{m_1} \circ \cdots \circ (D - \lambda_k)^{m_k}.$$

*Puisque l'algèbre  $\mathcal{D}$  est commutative nous avons*

$$u \in \text{Ker}(D - \lambda_j)^{m_j} \Rightarrow u \in \text{Ker} L_a.$$

Grâce à cette remarque nous pouvons commencer à déterminer le noyau (Ker) de  $(D - \lambda)^m$ , pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $m \geq 1$ .

LEMME 2.3. *Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $m \geq 1$ , alors :*

$$(VI.2.3) \quad e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t} \in \text{Ker}(D - \lambda)^m.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer le résultat par induction sur  $m$ . Si  $m = 1$  alors

$$(D - \lambda)e^{\lambda t} = De^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} = 0,$$

et donc  $e^{\lambda t}$  appartient au noyau de  $(D - \lambda)$ .

Supposons (VI.2.3) vraie pour  $m$  et nous allons la démontrer pour  $m+1$ . A cause de la factorisation (voir remarque 2.2) nous avons  $(D - \lambda)^{m+1} = (D - \lambda)(D - \lambda)^m$  et donc par l'hypothèse d'induction les fonctions  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$  sont dans le noyau de  $(D - \lambda)^m$ . Il nous reste à prouver que  $t^m e^{\lambda t}$  appartient à  $(D - \lambda)^{m+1}$  :

$$\begin{aligned} (D - \lambda)^{m+1} (t^m e^{\lambda t}) &= (D - \lambda)^m (D - \lambda) (t^m e^{\lambda t}) = (D - \lambda)^m (mt^{m-1}e^{\lambda t} + t^m \lambda e^{\lambda t} - \lambda t^m e^{\lambda t}) \\ &= (D - \lambda)^m (mt^{m-1}e^{\lambda t}) = 0, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue puisque par l'hypothèse d'induction nous savons que  $t^{m-1}e^{\lambda t} \in \text{Ker}(D - \lambda)^m$ .  $\square$

EXEMPLE 2.4. *Considérons l'EDO linéaire à coefficients constants homogène :*

$$(VI.2.4) \quad \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u = 0.$$

*En termes d'opérateurs nous avons  $(D^2 - 3D + 2)u = 0$ . Le polynôme associé est  $p(\alpha) = \alpha^2 - 3\alpha + 2$ , qui admet la factorisation  $p(\alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 2)$  et donc l'opérateur est factorisé en  $(D - 1)(D - 2)$ . Les fonctions  $u_1(t) = e^t$  et  $u_2(t) = e^{2t}$  sont respectivement dans les noyaux de  $D - 1$  et  $D - 2$ , c'est-à-dire  $u_1$  et  $u_2$  sont solutions de (VI.2.4). Puisque elles sont linéairement indépendantes ( $\lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t} \equiv 0$  si et seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ) la solution générale de (VI.2.4) est donnée par*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t),$$

*avec  $c_1$  et  $c_2$  constantes arbitraires.*

REMARQUE 2.5 (Racines complexes). *Si l'EDO linéaire homogène à coefficients constants et réels, alors le polynôme  $p(\alpha)$  est aussi à coefficients réels. Il peut cependant avoir des racines complexes et si  $\lambda = a + ib$  est une racine complexe alors la racine complexe conjuguée,  $\bar{\lambda} = a - ib$ , est solution :*

$$p(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^n + a_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_0 = \overline{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0} = \overline{p(\lambda)} = 0.$$

Cela implique que les fonctions  $e^{(a+ib)t}$  et  $e^{(a-ib)t}$  (qui sont linéairement indépendantes) sont solutions de l'EDO. Mais

$$e^{(a+ib)t} = e^a(\cos bt + i \sin bt) \text{ et } e^{(a-ib)t} = e^a(\cos bt - i \sin bt),$$

et puisque une solution générale de l'EDO est combinaison linéaire de  $e^{(a+ib)t}$  et  $e^{(a-ib)t}$ , on pourra aussi la écrire comme combinaison linéaire des fonctions  $e^{at} \cos bt$  et  $e^{at} \sin bt$ .

EXEMPLE 2.6. Considérons l'EDO

$$u^{(3)} - 2u^{(2)} + 2u^{(1)} = 0;$$

on lui associe l'opérateur  $D^3 - 2D^2 + 2D^1$ , dont le polynôme caractéristique est  $p(\alpha) = \alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha$ . Ses racines sont  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1 + i$  et (donc)  $\alpha = 1 - i$ , la solution générale est

$$u(t) = c_1 + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t,$$

où  $c_1$  doit être lu comme  $c_1 e^{0t}$ .

EXEMPLE 2.7. Considérons l'EDO

$$\ddot{u} - 2\dot{u} + u = 0,$$

avec son opérateur  $(D^2 - 2D + 1)$ , factorisé en  $(D - 1)^2$  : 1 racine double. Les solutions sont  $u_1(t) = e^t$  et  $u_2(t) = te^t$ , elles sont bien linéairement indépendantes, donc la solution générale est

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

Pour conclure la caractérisation de  $\mathcal{V}_0$  il nous reste à prouver que les fonctions  $e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1} e^{\lambda_k t}$  sont linéairement indépendantes, puisque elles sont  $n$  et la dimension de  $\mathcal{V}_0$  est  $n$  aussi, nous aurons déterminé une base de l'espace vectoriel qui est appelée aussi *système fondamentale*.

**2.3. Déterminant de Wronski.** Soient  $\phi_1, \dots, \phi_n$  éléments de  $\text{Ker } L_a$ , c'est-à-dire solutions de l'EDO linéaire homogène, définissons la fonction :

$$(VI.2.5) \quad t \mapsto \mathcal{W}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \dots & \phi_n(t) \\ \phi_1^{(1)}(t) & \dots & \phi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

et la fonction déterminant appelée *déterminant de Wronski* ou *Wronskien* :

$$(VI.2.6) \quad t \mapsto W(t) = \det \mathcal{W}(t) = W(t; \phi_1, \dots, \phi_n).$$

Nous allons montrer que à l'aide  $W(t)$  la question de l'indépendance linéaire sera facilement résolue grâce aux Lemmes suivants.

LEMME 2.8. Les fonctions  $\phi_1, \dots, \phi_n$  forment un système fondamental de  $\mathcal{V}_0$  si et seulement si  $W(t; \phi_1, \dots, \phi_n) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

DÉMONSTRATION. La démonstration est faite par contradiction. Supposons donc qu'il existe  $n$  constantes,  $c_1, \dots, c_n$ , pas toutes nulles telles que :

$$(VI.2.7) \quad c_1 \phi_1(t) + \dots + c_n \phi_n(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

puisque les fonctions  $\phi_i$  sont régulières (admettent les premières  $n - 1$  dérivées continues) pour tout  $k$  entier,  $k = 1, \dots, n - 1$ , nous pouvons calculer la dérivée d'ordre  $k$  de la relation (VI.2.7) :

$$(VI.2.8) \quad c_1 \phi_1^{(k)}(t) + \dots + c_n \phi_n^{(k)}(t) = 0 \quad \forall t \in I \text{ et } k = 1, \dots, n - 1.$$

Ces  $n$  relations peuvent être écrites sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \\ \phi_1^{(1)} & \dots & \phi_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in I.$$

Mais par hypothèse  $W(t) \neq 0$ , donc  $(c_1, \dots, c_n)^T = 0$  est la seule solution, contre l'hypothèse que les  $c_i$  n'étaient pas toutes nulles. Donc les  $\phi_i$  sont linéairement indépendantes.  $\square$

Mais on peut se simplifier la vie en vérifiant seulement que il existe  $t_0 \in I$  tel que  $W(t_0) \neq 0$  :

LEMME 2.9. Soient  $\phi_1, \dots, \phi_n$  dans  $\mathcal{V}_0$ , alors on a deux seules possibilités :

- (1)  $W(t) \equiv 0$  dans  $I$  ;
- (2)  $W(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $t_0 \in I$  tel que  $W(t_0) = 0$ , nous allons montrer que cela implique  $W(t) = 0$  pour tout  $t$ .

Puisque le déterminant vaut zéro en  $t_0$  ils existent des constantes réelles  $c_1, \dots, c_n$  pas toutes nulles, telles que :

$$c_1 \begin{pmatrix} \phi_1(t_0) \\ \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} \phi_n(t_0) \\ \vdots \\ \phi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

La fonction  $\psi(t) = c_1 \phi_1(t) + \dots + c_n \phi_n(t)$  est dans  $\mathcal{V}_0$  (elle est solution de l'EDO homogène à cause de la linéarité) et de plus elle est solution du PdC :

$$L_a(\psi) = 0 \quad \psi(t_0) = 0, \psi^{(1)}(t_0) = 0, \dots, \psi^{(n-1)}(t_0) = 0,$$

Mais ce PdC a comme solution la fonction identiquement nulle et donc par l'unicité du Théorème de Picard nous avons  $\psi(t) \equiv 0$  et donc  $W(t) \equiv 0$ .  $\square$

Ce résultat est contenu dans le suivant Lemme purement algébrique dû à Liouville

LEMME 2.10 (Liouville). Soient  $\phi_1, \dots, \phi_n$  dans  $\mathcal{V}_0$ , alors on a la relation

$$(VI.2.9) \quad W(t) = e^{-(t-t_0)a_{n-1}} W(t_0).$$

DÉMONSTRATION. Notons que les composantes de la matrice  $\mathcal{W}$  peuvent être réécrites comme il suit, pour  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$  :

$$w_{i,j} = \phi_j^{(i-1)}.$$

Alors le déterminant de Wronski est par définition :

$$W(t) = \det \mathcal{W}(t) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) w_{p(1),1} \dots w_{p(n),n},$$

où  $S_n$  est l'ensemble des *permutations* des entiers entre 1 et  $n$ ,  $sgn(p)$  est la *signature de la permutation*

$$sgn(p) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est paire (produit d'un nombre pair de transpositions)} \\ -1 & \text{si } p \text{ est impaire (produit d'un nombre impair de transpositions)} \end{cases}$$

et la somme est faite sur toutes les façons possibles de choisir  $n$  éléments de  $\mathcal{W}$  appartenant à des lignes et colonnes distinctes.

Calculons la dérivé de  $W(t)$  (rappelons que les composantes  $w_{i,j}$  sont des fonctions du temps) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \mathcal{W}(t) &= \sum_{p \in S_n} sgn(p) \frac{d}{dt} (w_{p(1),1} \dots w_{p(n),n}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{p \in S_n} sgn(p) w_{p(1),1} \dots w_{p(i-1),1} \dot{w}_{p(i),1} w_{p(i+1),1} w_{p(n),n} \\ &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{i-1,1} & \dots & w_{i-1,n} \\ \dot{w}_{i,1} & \dots & \dot{w}_{i,n} \\ w_{i+1,1} & \dots & w_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n W(t; \phi_1, \dots, \phi_{i-1}, \dot{\phi}_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_n) = \sum_{i=1}^n W_i(t). \end{aligned}$$

Donc le déterminant est la somme de  $n$  déterminants, chacun avec une seule dérivé. Mais si  $i \leq n-1$ , alors

$$\frac{d}{dt} w_{i,j} = \frac{d}{dt} \phi_j^{(i-1)} = \phi_j^{(i)} = w_{i+1,j},$$

et donc tous les déterminant  $W_i(t)$  sont zéro si  $i \leq n-1$  puisque ils ont deux lignes égales, par exemple

$$W_1(t) = \det \begin{pmatrix} w_{2,1} & \dots & w_{2,n} \\ w_{2,1} & \dots & w_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,n} \end{pmatrix} = 0, W_2(t) = \det \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ w_{3,1} & \dots & w_{3,n} \\ w_{3,1} & \dots & w_{3,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,n} \end{pmatrix} = 0,$$

et en général

$$W_i(t) = \det \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{i-1,1} & \dots & w_{i-1,n} \\ w_{i+1,1} & \dots & w_{i+1,n} \\ w_{i+1,1} & \dots & w_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n,1} & \dots & w_{n,n} \end{pmatrix} = 0.$$



Le seul déterminant qui n'est pas zéro est  $W_n$  donc

$$\frac{d}{dt} \det \mathcal{W}(t) = \det \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1,1} & \dots & w_{n-1,n} \\ \dot{w}_{n,1} & \dots & \dot{w}_{n,n} \end{pmatrix},$$

mais  $\dot{w}_{n,j} = \dot{\phi}_j^{(n-1)} = \phi_j^{(n)}$  et donc puisque  $\phi_j$  sont des solutions de l'EDO nous avons

$$\phi_j^{(n)} = -a_{n-1}\phi_j^{(n-1)} - \dots - a_0\phi_j = -a_{n-1}w_{n,j} - \dots - a_0w_{1,j},$$

donc

$$\frac{d}{dt} \det \mathcal{W}(t) = \det \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1,1} & \dots & w_{n-1,n} \\ -a_{n-1}w_{n,1} - \dots - a_0w_{1,1} & \dots & -a_{n-1}w_{n,n} - \dots - a_0w_{1,n} \end{pmatrix}.$$

On remarque que la dernière ligne a été construite à partir  $W(t)$  comme il suit :  $-a_{n-1}$  fois la dernière ligne de  $W(t)$ ,  $-a_{n-2}$  fois l'avant dernière ligne de  $W(t)$  et cetera. Mais le déterminant ne change pas si on substitue une ligne avec une combinaison linéaire d'autres ligne et donc on peut retrancher tous les termes de la combinaison linéaire sauf les premiers :

$$\frac{d}{dt} W(t) = \det \begin{pmatrix} w_{1,1} & \dots & w_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1,1} & \dots & w_{n-1,n} \\ -a_{n-1}w_{n,1} & \dots & -a_{n-1}w_{n,n} \end{pmatrix},$$

et pour la propriété du déterminant (si on multiplie une ligne par une constante alors tout le déterminant est multiplié par la même constante on conclut que :

$$\frac{d}{dt} W(t) = -a_{n-1}W(t),$$

et donc avec intégration

$$W(t) = e^{-a_{n-1}(t-t_0)} W(t_0).$$

□

REMARQUE 2.11. Nous observons que  $-a_{n-1}$  est la trace de la matrice  $A$  (somme des termes sur la diagonale) de l'EDO linéaire, donc en général pour l'EDO  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  le déterminant de Wronski vérifie :

$$W(t) = W(t_0)e^{-\text{tr}(A)(t-t_0)}.$$

REMARQUE 2.12. La démonstration du Lemme 2.9 suit du Lemme 2.10 en remarquant que la fonction exponentielle n'est jamais zéro et donc si il existe  $t_0$  tel que  $W(t_0) \neq 0$  alors  $W(t) \neq 0$  pour tout  $t$ .

REMARQUE 2.13 (Interprétation géométrique de Lemme 2.10). D'après le cours d'algèbre (ou de calcul) on sait que le déterminant est le volume orienté des  $n$  vecteurs lignes (ou colonnes), donc le Lemme de Liouville nous dit que le volume (de l'espace de phases) varie par rapport au temps avec une lois exponentielles, sauf si la trace est nulle et alors il est constant.

**2.4. Indépendance linéaire de fonctions.** Nous avons maintenant tous les moyens pour démontrer que les  $n$  fonctions  $e^{\lambda_1}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}$  de  $\mathcal{V}_0$  sont linéairement indépendantes. Pour cela ça suffit de calculer leurs déterminant de Wronski :

$$W(t) = W(t; e^{\lambda_1}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}),$$

et vérifier (grâce au Lemme 2.9) qu'il existe un point  $t_0$  pour lequel  $W(t_0) = 0$ . Cela est généralement un tache dure sauf si le polynôme caractéristique  $p(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0$  a  $n$  racines distinctes :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ( $k = n$  et  $m_j = 1$  pour  $1 \leq j \leq n$ ). Dans ce cas avec  $t_0 = 0$  nous avons

$$W(t; e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_k}) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} (t=0) = \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrons que ce déterminant (appelé *déterminant de Van der Monde*) est différent de zéro. Supposons au contraire qu'il soit égal à zéro, donc ils existent  $n$  constantes, non toutes nulles,  $c_1, \dots, c_n$  telles que pour tout  $1 \leq k \leq n$  (combinaison linéaire des  $n$  colonnes) :

$$c_1 + c_2 \lambda_k + c_3 \lambda_k^2 \dots + c_n \lambda_k^{n-1} = 0,$$

mais alors le polynôme  $q(x) = \sum_{l=1}^n c_l x^{l-1}$ , de degré  $n-1$ , a  $n$  racines distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ce qui est absurde puisque un polynôme peut avoir au plus un nombre de racines distinctes égal à son degré.

La partie restante du paragraphe sera consacrée à la démonstration de l'indépendance des  $n$  fonctions  $e^{\lambda_1}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}$  dans le cas générale. Soit donc  $\mathcal{S} = \langle e^{\lambda_1}, te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_1-1}e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_k}, te^{\lambda_k t}, \dots, t^{m_k-1}e^{\lambda_k t} \rangle$  vous voulons démontrer que  $\mathcal{S} = \mathcal{V}_0$ , pour le moment nous savons seulement que :  $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}_0$ . Pré mettons quelques remarques.

**REMARQUE 2.14.** Toute combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{S}$  peut être réécrite comme :  $p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_s(t)e^{\lambda_s t}$ , où  $s \leq k$  et  $p_j(t)$  sont des polynômes de degré  $\deg p_j = d_j \leq m_j - 1$ . Pour cela ça suffit de mettre en facteurs pour  $j \in \{1, \dots, k\}$ , la fonction exponentielle  $e^{\lambda_j t}$ , et donc son "coefficient" sera par définition le polynôme  $p_j$ .

Donc des éléments de  $\mathcal{S}$  sont linéairement dépendant s'ils existent  $s \leq k$  polynômes  $(p_j(t))_{1 \leq j \leq s}$  de degré  $\deg p_j = d_j \leq m_j - 1$ , qui ne sont pas tous nuls tels que :

$$(VI.2.10) \quad p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_s(t)e^{\lambda_s t} = 0.$$

Montrons maintenant l'indépendance linéaire des éléments de  $\mathcal{S}$ . Supposons que la thèse soit fausse et donc que les éléments de  $\mathcal{S}$  sont linéairement dépendants; grâce au remarque précédant 2.14 ils existent  $s \leq k$  polynômes  $(p_j(t))_{1 \leq j \leq s}$  de degré  $\deg p_j = d_j \leq m_j - 1$ , pas tous nuls tels que :  $p_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + p_s(t)e^{\lambda_s t} = 0$ . Supposons que  $s$  soit le nombre minimale de polynômes nécessaires pour faire une telle combinaisons linéaire<sup>3</sup>. Puisque  $e^{\lambda_1 t}$  n'est jamais zéro on peut le factoriser et donc la relation de dépendance linéaire devient :

$$p_1(t) + p_2(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + p_s(t)e^{(\lambda_s - \lambda_1)t} = 0.$$

<sup>3</sup>On peut assumer  $s > 1$  puisque la relation  $p_1(t)e^{\lambda_1 t} = 0$  ne peut jamais être réalisée.

Dérivons la relation précédente  $d_1 + 1$  fois (étant  $d_1$  le degré de  $p_1$ ), puisque

$$\frac{d^{d_1+1}}{dt^{d_1+1}} p_1(t) = 0,$$

nous avons

$$\frac{d^{d_1+1}}{dt^{d_1+1}} \left( p_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + p_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} \right) = 0.$$

Soit  $2 \leq j \leq s$  et considérons la dérivée du terme avec  $p_j(t)$  :

$$(VI.2.11) \quad \frac{d^{d_1+1}}{dt^{d_1+1}} \left( p_j(t)e^{(\lambda_j-\lambda_1)t} \right) = \left( (\lambda_j - \lambda_1)^{d_1+1} p_j(t) + (d_1 + 1)(\lambda_j - \lambda_1)^{d_1} \frac{d}{dt} p_j(t) + \dots \right) e^{(\lambda_j-\lambda_1)t},$$

où les points représentent des termes avec dérivées de  $p_j$  d'ordre plus grand que un avec certains coefficients. Donc si  $\deg p_j(t) = d_j$ , le seul terme qui contiendra la puissance  $t^{d_j}$  sera le premier avec un coefficient  $\alpha_{j,d_j}(\lambda_j - \lambda_1)^{d_1+1}$  différent de zéro puisque  $\lambda_j \neq \lambda_1$ , tous les autres termes auront des puissances  $t^q$  avec  $q < d_j$ . Si on revient à (VI.2.11) on pourra la récrire comme

$$r_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + r_s(t)e^{(\lambda_s-\lambda_1)t} = 0,$$

avec  $(r_j(t))_{2 \leq j \leq s}$  polynômes non tous nuls qui permettent d'écrire une combinaison linéaire nulle de éléments de  $\mathcal{S}$ , ce qui est en contradiction avec la minimalité de  $s$  (le nombre de polynômes choisi au départ était le plus petit possible). Donc les éléments de  $\mathcal{S}$  sont bien linéairement indépendants et ils constituent une base, *système fondamentale*, de  $\mathcal{V}_0$ .

**2.5. Conclusions.** Nous pouvons donc conclure cette section en résumant les résultats obtenus de la façon suivante.

THÉORÈME 2.15. *L'EDO linéaire homogène d'ordre  $n$  à coefficients constants :*

$$(VI.2.12) \quad u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_0u = 0,$$

avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1} \subset \mathbb{C}$ , admet une solution générale (intégrale générale) de la forme :

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^s p_j(t)e^{\lambda_j t},$$

où :

- (1)  $s$  est un entier plus petit ou égal à  $n$  ;
- (2)  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  sont les racines distinctes complexes du polynôme caractéristique associé à l'EDO :  $p(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_0$  ;
- (3)  $m_1, \dots, m_s$  (entiers plus grand que 1) sont les multiplicités des racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  ;
- (4)  $p_1(t), \dots, p_s(t)$  sont des polynômes à coefficients complexes de degré respectivement  $m_1 - 1, \dots, m_s - 1$ .

Si l'EDO (VI.2.12) est à coefficients réels alors on voudrait pouvoir écrire la solution générale avec des fonctions réelles, cela est possible grâce au Théorème suivant :

THÉOREME 2.16 (Coefficients réels). *L'EDO linéaire homogène d'ordre  $n$  à coefficients réels constants :*

$$(VI.2.13) \quad u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0u = 0,$$

avec  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_k)_{0 \leq n-1} \subset \mathbb{R}$ , admet une solution générale (intégrale générale) de la forme :

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{s'} p_j(t) e^{\lambda_j t} + \sum_{l=1}^{s''} (q_{l,1}(t) \cos(\beta_l t) + q_{l,2} \sin(\beta_l t)),$$

où :

- (1)  $s'$  et  $s''$  sont des entiers tels que  $s' + s'' \leq n$  ;
- (2)  $\lambda_1, \dots, \lambda_{s'}$  sont les racines distinctes réelles du polynôme caractéristique associé à l'EDO :  $p(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$ , de multiplicités :  $m_1, \dots, m_{s'}$  ;
- (3)  $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_{s''} \pm i\beta_{s''}$  sont les racines distinctes complexes conjuguées du polynôme caractéristique associé à l'EDO de multiplicités :  $\mu_1, \dots, \mu_{s''}$  ;
- (4)  $p_1(t), \dots, p_{s'}(t)$  sont des polynômes à coefficients réels de degré respectivement  $m_1 - 1, \dots, m_{s'} - 1$  ;
- (5)  $q_{1,j}(t), \dots, p_{s'',l}(t)$ ,  $l = 1, 2$ , sont des polynômes à coefficients réels de degré respectivement  $\mu_1 - 1, \dots, \mu_{s''} - 1$ .

### 3. EDO linéaires à coefficients constants non homogènes

Considérons maintenant une EDO de la forme

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0u = f,$$

c'est-à-dire linéaire, non homogène à coefficients constants. Nous avons déjà vu que toute solution peut être écrite comme somme de la solution générale du problème homogène associé (voir section précédente) avec une solution particulière.

Dans cette section nous montrerons une méthode valable pour une classe de fonctions  $f$  (polynômes trigonométriques généralisés avec fonctions exponentielles) qui nous permettra de déterminer une solution particulière et donc une solution générale d'après les résultats précédents.

Dans la section suivante nous présenterons une méthode générale (pour  $f$  quelconque) pour déterminer une solution particulière valable dans le cas de *coefficient non constants*, mais quelque peu formelle et compliquée.

Considérons donc l'EDO

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_0u = f,$$

où la fonction  $f$  peut être dans un des suivants cas :

- (1)  $f$  est un polynôme  $P(t)$  ;
- (2)  $f(t)$  est le produit d'un polynôme par une exponentielle réelle :  $f(t) = P(t)e^{\beta t}$ , avec  $\beta \in \mathbb{R}$  et  $P(t)$  un polynôme ;
- (3)  $f(t)$  est le produit d'un polynôme, d'une exponentielle réelle et d'un polynôme trigonométrique :  $f(t) = P(t)e^{\beta t} (a \cos(\gamma t) + b \sin(\gamma t))$ , avec  $a, b, \beta$  et  $\gamma$  réels et  $P(t)$  un polynôme ;
- (4)  $f$  est une combinaison linéaire des trois cas précédents.

Chaque cas sera considéré séparément dans un des paragraphes suivants où une méthode pratique pour la recherche d'une solution particulière de l'EDO sera montrée.

**3.1. Cas 1 :  $\mathbf{f(t) = P(t)}$ .** Soit  $p = \deg P(t)$ , cherchons la solutions particulière dans la forme d'un polynôme de degré  $q$ ,  $u_{part}(t) = q(t)$ . Les inconnues sont les coefficients du polynôme  $q(t)$  et son degré.

Soit  $j$  le plus petit entier plus grand que 1 tel que  $a_j \neq 0$ , en d'autres termes le polynôme caractéristique associé à l'EDO est de la forme :  $p(\alpha) = \alpha^j p_1(\alpha)$ , où  $p_1(0) \neq 0$  ( $j$  est dite aussi *multiplicité de 0*). Alors  $L_a q(t)$  est un polynôme de degré  $q - j$  (on fait agir sur  $q(t)$  au minimum  $j$  dérivées) qui doit être égal au degré de  $P(t)$ , ce qui va fixer la première inconnue :  $q = j + p$ .

Si on écrit maintenant <sup>4</sup>  $u_{part}(t) = t^j (b_0 + b_1 t + \dots + b_p t^p)$  nous pouvons déterminer tous les coefficients en égalisant les coefficients de mêmes puissances en  $t$  dans  $L_a u_{part} = P(t)$ .

EXEMPLE 3.1. Déterminer la solution générale de l'EDO

$$u^{(3)} + 2u^{(2)} + u^{(1)} = 1 + t^2.$$

Le polynôme caractéristique associé est  $p(\alpha) = \alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha$  qui se factorise en  $\alpha(\alpha + 1)^2$  donc le racine sont  $\lambda_1 = 0$ , avec  $m_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -1$  avec  $m_2 = 2$ . D'après le Théorème 2.15 l'intégrale générale de l'EDO homogène est :

$$u_0(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}.$$

Le polynôme  $P(t) = 1 + t^2$  a degré 2 et la multiplicité de la racine  $\alpha = 0$  est un donc  $j = 1$ . On doit chercher les coefficients  $u_{part}(t) = t(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)$ . Si on fait agir  $L_a$  sur  $u_{part}(t)$  on trouve :

$$u_{part}^{(3)}(t) + 2u_{part}^{(2)}(t) + u_{part}^{(1)}(t) = 3b_2 t^2 + (2b_1 + 12b_2)t + (b_0 + 4b_1 + 6b_2),$$

qui doit être égal à  $P(t)$ , donc

$$\begin{cases} 3b_2 & = 1 \\ 2b_1 + 12b_2 & = 0 \\ b_0 + 4b_1 + 6b_2 & = 1. \end{cases}$$

On obtient avec simple calcul

$$u_{part}(t) = t \left( 7 - 2t + \frac{1}{3}t^2 \right).$$

**3.2. Cas 2 :  $\mathbf{f(t) = P(t)e^{\beta t}}$ .** Soit  $p = \deg P(t)$  et soit  $j$  la multiplicité de  $\beta$  comme racine du polynôme caractéristique  $p(\alpha)$ , si  $p(\beta) \neq 0$  alors  $j = 0$ . On cherche une solution particulière de la forme :

$$u_{part}(t) = t^j e^{\beta t} (b_0 + b_1 t + \dots + b_p t^p).$$

Encore une fois les coefficients  $b_0, \dots, b_p$  sont déterminés en identifiant les coefficients des mêmes puissances de  $t$  dans  $L_a u_{part}(t)$  et  $P(t)$ .

---

<sup>4</sup>Nous remarquons que celle-ci n'est pas la formule générale d'un polynôme de degré  $j+p$ , qui serait  $\tilde{q}(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_{j+p} t^{j+p}$ . Mais l'opérateur différentiel se factorise en  $L_a = a_j L_{a'} \circ D^j$ , où  $L_{a'}$  c'est un opérateur différentiel d'ordre  $n - j$ , et donc l'action de  $D^j$  élimine dans  $\tilde{q}(t)$  tous les coefficients des puissances plus petites que  $j$ , d'où la forme recherchée.

EXEMPLE 3.2. *Considérons l'EDO*

$$u^{(2)} - u^{(1)} - 2u = e^{2t}(t^2 + t).$$

Le polynôme caractéristique de l'EDO homogène associée est  $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - 2$ , qui se factorise en  $(\alpha - 2)(\alpha + 1)$  avec deux racines simples. La solution générale de l'EDO homogène est donc :  $u_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$ .

Le quasi-polynôme  $e^{2t}(t^2 + t)$  a  $\beta = 2$  et  $p = 2$ , de plus  $\beta = 2$  est racine simple de  $p(\alpha)$  donc  $j = 1$ . La solution particulière est cherchée de la forme :

$$u_{part}(t) = te^{2t}(b_0 + b_1 t + b_2 t^2),$$

dont les coefficients sont déterminés d'après le calcul de  $L_a u_{part}$  :

$$u_{part}^{(2)} - u_{part}^{(1)} - 2u_{part} = e^{2t}[(3b_0 + 2b_1) + (6b_2 + 6b_1)t + 9b_2 t^2].$$

En égalisant avec  $e^{2t}(t^2 + t)$  on a :

$$\begin{cases} 9b_2 &= 1 \\ 6b_2 + 6b_1 &= 1 \\ 3b_0 + 2b_1 &= 0, \end{cases}$$

d'où :

$$u_{part}(t) = te^{2t} \left( -\frac{1}{27} + \frac{t}{18} + \frac{t^2}{9} \right).$$

**3.3. Cas 3 :  $f(t) = P(t)e^{\beta t}(\mathbf{a} \cos(\gamma t) + \mathbf{b} \sin(\gamma t))$ .** Soit  $p = \deg P(t)$ ,  $j$  la multiplicité de  $\beta \pm i\gamma$  comme racine complexe conjuguée du polynôme caractéristique  $p(\alpha)$ , si  $p(\beta \pm i\gamma) \neq 0$  alors  $j = 0$ . On cherche alors une solution particulière de la forme :

$$u_{part}(t) = t^j e^{\beta t} (Q_1(t) \cos(\gamma t) + Q_2(t) \sin(\gamma t)),$$

où  $Q_1$  et  $Q_2$  sont deux polynômes de degré  $p$ .

EXEMPLE 3.3. *Considérons l'EDO*

$$u^{(2)} + u = \cos t,$$

dont le polynôme caractéristique de l'EDO homogène associée est  $p(\alpha) = \alpha^2 + 1$ , qui a comme racines simples  $\pm i$ . La solution générale est donc

$$u_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t = d_1 e^{it} + d_2 e^{-it}.$$

Le quasi-polynôme trigonométrique (ici réduit au cos) a :  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$  et  $p = 0$ , on remarque que  $p(i) = 0$  (racine simple) et donc  $j = 1$ , finalement on peut chercher la solution particulière de la forme :

$$u_{part}(t) = t(q_1 \cos t + q_2 \sin t),$$

et les coefficients  $q_1$  et  $q_2$  sont déterminés de  $L_a u_{part} = \cos t$  :

$$\cos t = u_{part}^{(2)} + u_{part} = -2q_1 \sin t + q_2 \cos t,$$

donc  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 1/2$  et la solution particulière est :

$$u_{part}(t) = \frac{t}{2} \sin t.$$

**3.4.  $f(t)$  combinaisons de précédents.** Si  $f$  est obtenue comme somme de  $f_1 + f_2 + f_3$ , où chaque terme est de la forme vu dans le cas précédents, à cause de la linéarité de l'opérateur  $L_a$  nous pourrions déterminer une solution particulière pour chaque terme composant  $f$  et après obtenir l'intégrale particulière comme somme des solutions particulières.

#### 4. EDO linéaires

Considérons à nouveau une EDO d'ordre  $n$  linéaire avec coefficients dépendant du temps :

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)u = f,$$

où avec l'opérateur différentiel associé

$$L_a u = f.$$

Nous avons déjà montré que toute solution peut être écrite comme somme de la solution générale de l'EDO homogène associée avec une solution particulière et que l'espace des solutions de l'EDO homogène associée,  $\mathcal{V}_0$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

Hélas cette fois nous n'avons pas une description en générale de la base, *système fondamental*, de  $\mathcal{V}_0$ , mais il ne fallait pas s'attendre différemment puisque si les fonctions  $a_k(t)$  sont quelconques, la base aussi pourra être quelconque. On devra donc utiliser pour chaque problème des méthodes différentes pour obtenir les solutions de l'EDO homogène associée.

Si nous supposons d'avoir un système fondamental pour  $\mathcal{V}_0$ , nous pouvons considérer le problème initial non homogène et montrer comment trouver une solution particulière (et donc toute solution en rajoutant la solution générale de l'EDO homogène).

**4.1. Méthode de la variation des constantes.** La méthode exposée dans cette section est une généralisation de la méthode, portant le même nom, vue dans la section V.2 pour le cas particulier de dimension un.

Supposons de connaître un système fondamental de l'EDO homogène :

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)u = 0,$$

et appelons ces fonctions  $(\phi_j(t))_{1 \leq j \leq n}$  définies sur l'intervalle ouvert  $I$ , où aussi les  $(a_j(t))_{0 \leq j \leq n-1}$  sont définies et continues. Donc la solution générale de l'EDO homogène est une fonction de la forme :

$$x_0(t) = c_1^0 \phi_1(t) + \cdots + c_n^0 \phi_n(t),$$

où les  $c_j^0$  sont des constantes (réelles ou complexes). En formule compacte nous écrirons :

$$\boldsymbol{\phi}(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \boldsymbol{c}^0 = (c_1^0, \dots, c_n^0),$$

et donc la solution générale comme :

$$x_0(t) = \boldsymbol{c}^0 \cdot \boldsymbol{\phi}(t) := \sum_{j=1}^n c_j^0 \phi_j(t).$$

Donnée cette forme pour la solution de l'EDO homogène, nous cherchons une solution particulière de l'EDO non homogène de la forme :

$$(VI.4.1) \quad x(t) = \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t) := \sum_{j=1}^n c_j(t) \phi_j(t),$$

où maintenant  $\mathbf{c}(t)$  est une fonction du temps (inconnue). La fonction  $x(t)$  est une solution si elle vérifie

$$(VI.4.2) \quad x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = f(t),$$

puisque les fonctions  $\mathbf{c}(t)$  sont arbitraire nous décidons de les soumettre aux contraintes suivants :

$$(VI.4.3) \quad \begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) &= \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(2)}(t) \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t) &= \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

En dérivant la définition (VI.4.1) nous obtenons :

$$x^{(1)}(t) = \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(1)}(t),$$

qui avec le premier contrainte (VI.4.3) nous donne :

$$(VI.4.4) \quad \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t) = 0.$$

Si nous dérivons le premier contrainte (VI.4.3)

$$x^{(2)}(t) = \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(2)}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(2)}(t),$$

et nous utilisons la relation (VI.4.4), nous avons :

$$\mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(1)}(t) = 0.$$

C'est clair qu'on peut continuer à dériver les premiers  $n - 2$  contraintes (VI.4.3) et utiliser les relations déjà trouvées pour trouver :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(2)}(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-2)}(t) &= 0. \end{aligned}$$

La dérivation du dernier contrainte nous donne

$$x^{(n)}(t) = \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-1)}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n)}(t),$$

mais  $x(t)$  est une solution et donc elle vérifie (VI.4.2), en remplaçant les dérivées de  $x(t)$  avec les (VI.4.3) et en utilisant la relation précédente on obtient :

$$f(t) - a_{n-1}(t)\mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t)^{(n-1)} - \dots - a_0(t)\mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-1)}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n)}(t).$$

Mais  $\boldsymbol{\phi}(t)$  est un vecteur dont les composantes sont des solutions de l'EDO homogène associée, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\phi}(t)^{(n)} + a_{n-1}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^{(n-1)} + \dots + a_0(t)\boldsymbol{\phi}(t) = 0,$$

et donc :

$$(VI.4.5) \quad \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-1)}(t) = f(t).$$



En résumant  $x(t) = \mathbf{c}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t)$  est une solution de l'EDO si les fonctions  $\mathbf{c}^{(1)}(t)$  vérifient le système linéaire non homogène suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}(t) &= 0 \\ \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(1)}(t) &= 0 \\ \vdots & \\ \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-2)}(t) &= 0 \\ \mathbf{c}^{(1)}(t) \cdot \boldsymbol{\phi}^{(n-1)}(t) &= f(t), \end{cases}$$

qui peut être récrit en utilisant la matrice de Wronski (VI.2.5) dans la forme suivante

$$(VI.4.6) \quad \mathcal{W}(t)\mathbf{c}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\det \mathcal{W}(t) \neq 0$ , pour tout  $t \in I$  (Lemme 2.10) on peut inverser la matrice  $\mathcal{W}(t)$  et donc déterminer le vecteur  $(\mathbf{c}^{(1)})$  :

$$\mathbf{c}^{(1)}(t) = \mathcal{W}^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

qui peut être simplifié avec la *règle de Cramer*

$$c_i^{(1)}(t) = \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \dots & \phi_{i-1}(t) & 0 & \phi_{i+1}(t) & \dots & \phi_n(t) \\ \phi_1^{(1)}(t) & \dots & \phi_{i-1}^{(1)}(t) & 0 & \phi_{i+1}^{(1)}(t) & \dots & \phi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \phi_{i-1}^{(n-1)}(t) & f(t) & \phi_{i+1}^{(n-1)}(t) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} = \frac{W_{ni}(t)}{W(t)} f(t),$$

où  $W(t)$  est le déterminant de Wronski et l'autre est le déterminant de la matrice obtenue en substituant la colonne  $i$ -ème avec le vecteur  $(0, \dots, 0, f(t))^T$ . Dans la dernière égalité  $W_{ni}(t)$  est le *complément algébrique*  $(n, i)$  de la matrice  $\mathcal{W}(t)$  (c'est-à-dire le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la  $n$ -ème ligne et la  $i$ -ème colonne de  $\mathcal{W}(t)$  multiplié par  $(-1)^{n+i}$ ), cette égalité est évidente une fois qu'on développe le déterminant dans la formule par rapport à la colonne  $i$ -ème et on remarque que toutes les entrées sont nulles sauf la  $n$ -ième qui vaut  $f(t)$ .

Par intégration nous trouvons

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{W_{ni}(s)}{W(s)} f(s) ds,$$

d'où la solution particulière est donnée par :

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(t) \left( c_j(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{W_{nj}(s)}{W(s)} f(s) ds \right).$$

### 5. Oscillateur linéaire (d'après Anne Lemaître, cours mécanique)

Nous allons conclure ce Chapitre avec une “application” des méthodes de résolution des EDO linéaires. Cette application est prise du cours de Mécanique de BAC2, il s'agit de l'oscillateur linéaire. Nous avons déjà vu au paragraphe V.6 l'oscillateur harmonique, ce que nous ferons ici sera donc d'inclure l'exemple connu dans un cadre plus général.

L'oscillateur linéaire *libre* (par opposition à l'oscillateur linéaire forcé que nous étudierons dans le paragraphe suivant) est décrit par l'équation différentielle homogène :

$$(VI.5.1) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

par rapport à l'oscillateur harmonique le extra-terme,  $2h\dot{x}$  (le facteur 2 est mis pour des “raisons esthétiques” pour les calculs suivants), peut être identifié avec une *friction*, qui s'oppose au mouvement “naturel” et qui cause la non-conservation de l'énergie.

Cette équation est importante pour (au moins) deux raisons :

- (1) C'est une équation linéaire. C'est donc une équation dont on peut trouver aisément une solution générale.
- (2) De nombreuses situations physiques intéressantes peuvent être modélisées par une équation de ce type. Par exemple :
  - (a) Le ressort linéaire : Soit une masse attachée à l'extrémité d'un ressort. La masse peut se déplacer le long de l'axe  $x$ . La force de rappel du ressort est proportionnelle au déplacement de la masse et la force de frottement est proportionnelle à la vitesse.
  - (b) Circuit électrique oscillant : Si la charge du condensateur est  $q$ , le courant  $i$  vaut  $dq/dt$  et la tension créée par la bobine d'induction vaut  $L di/dt$ . En sommant les différences de potentiel sur le circuit fermé, on trouve :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0.$$

L'équation (VI.5.1) est homogène et linéaire, donc les méthodes vues dans ce Chapitre sont d'application. Le polynôme caractéristique associé à cette EDO est :

$$(VI.5.2) \quad \alpha^2 + 2h\alpha + \omega^2 = 0,$$

dont les racines sont :

$$(VI.5.3) \quad \lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2} \quad \text{and} \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Selon les valeurs des paramètres  $h$  et  $\omega$  nous aurons des comportements tout à fait différents.

**5.1. Oscillateur harmonique :  $h = 0$ .** Nous avons déjà étudié ce cas ; nous rappelons brièvement que les solutions sont données par

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t},$$

avec des constantes complexes arbitraires  $a$  et  $b$ . Car  $\lambda_1 = i\omega = \bar{\lambda}_2$  et puisque l'EDO est réelle, nous pouvons exprimer aussi la solution en forme réelle avec les

fonctions trigonométriques, nous écrirons donc :

$$x(t) = c \cos(\omega t) + d \sin(\omega t),$$

ou encore

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

Nous pouvons passer d'une formule à l'autre avec les relations :

$$A = \sqrt{c^2 + d^2} \quad \text{et} \quad \tan \phi = -\frac{d}{c}.$$

**5.2. Oscillateur faiblement amorti :**  $h^2 < \omega^2$ . Les deux racines du polynôme caractéristique restent complexes conjuguées :

$$\lambda_1 = -h + i\sqrt{\omega^2 - h^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -h - i\sqrt{\omega^2 - h^2},$$

donc la solution générale est de la forme :

$$x(t) = e^{-ht} (c \cos \Omega t + d \sin \Omega t) = A e^{-ht} \cos(\Omega t + \phi),$$

avec  $\Omega := \omega^2 - h^2$ , et la relation entre les deux formes de la solution est la même de celle vue au paragraphe précédent.  $\Omega$  est appelée *pseudo-fréquence*, car elle donne bien une structure périodique du mouvement (la solution passe par le zéro tous les multiples entiers de  $2\pi/\Omega$ ), mais la solution n'est pas périodique, par exemple si  $h > 0$ , alors la solution décroît de façon exponentielle pour  $t$  qui devient de plus en plus grand.

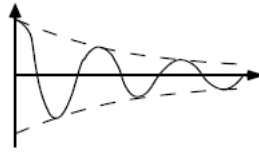


FIG. 1. Oscillateur faiblement amorti. Solution  $x(t)$  pour  $h > 0$ .

On peut interpréter cette solution comme un mouvement oscillatoire avec décroissance exponentielle.

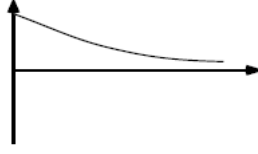
**5.3. Oscillateur fortement amorti :**  $h^2 > \omega^2$ . Cette fois, les deux racines du polynôme caractéristique sont réelles et valent :

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2},$$

la solution générale est :

$$x(t) = e^{-ht} (c e^{\kappa t} + d e^{-\kappa t}),$$

avec  $\kappa = \sqrt{h^2 - \omega^2}$ ; observons que, si  $h > 0$ , alors  $\kappa < h$  est donc le mouvement sera toujours décroissant pour  $t$  grand positif. Les oscillations périodiques ont complètement disparu.

FIG. 2. Oscillateur fortement amorti. Solution  $x(t)$  pour  $h > 0$ .

**5.4. Cas critique :**  $h^2 = \omega^2$ . Dans ce cas les valeurs propres sont égales :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -h,$$

ou autrement dit  $-h$  est une solution de multiplicité 2 du polynôme caractéristique, donc la solution générale est :

$$x(t) = ce^{-ht} + dte^{-ht}.$$

Encore une fois il n'y a aucun phénomène oscillatoire.

**5.5. Oscillateur forcé : phénomène de résonance.** Dans ce paragraphe nous allons considérer la généralisation suivante de l'oscillateur vu précédemment. Supposons qu'une force extérieure périodique soit appliquée sur l'oscillateur linéaire. Dans le cas le plus simple nous pouvons supposer que cette force ait une seule fréquence, alors l'équation du mouvement sera du type :

$$(VI.5.4) \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega^2 x = F \sin(\omega_1 t).$$

L'équation différentielle n'est plus homogène; la fonction  $f(t)$  vaut ici  $F \sin(\omega_1 t)$ . Nous avons vu que la solution générale de ces EDOL non-homogène est donnée par la solution générale de l'équation homogène associée, plus une solution particulière. Soit  $p(\alpha)$  le polynôme caractéristique de l'équation homogène, alors si  $p(\omega_1) \neq 0$ , hypothèse que nous supposons dans la suite, cette solution particulière sera de la forme

$$x_p(t) = a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t,$$

où les constantes  $a$  et  $b$  doivent être déterminées en imposant que  $x_p$  soit une solution de (VI.5.4).

Après avoir substitué  $x_p$  dans (VI.5.4) et égalisé les coefficients de mêmes fonctions trigonométriques nous trouvons :

$$\begin{cases} a &= \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)F}{4h^2\omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2} \\ b &= \frac{-2h\omega_1 F}{4h^2\omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2} \end{cases},$$

Nous pouvons écrire sous une forme de plus facile interprétation :

$$y(t) = A \sin(\omega_1 t + \phi),$$

avec :

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F}{\sqrt{4h^2\omega_1^2 + (\omega^2 - \omega_1^2)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{b}{a} = \frac{-2h\omega_1}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

La solution générale sera donc la somme de  $y(t)$  plus une des solutions vues aux paragraphes précédents selon les valeurs des paramètres. Si  $h > 0$ , ces solutions ont toujours un terme décroissant exponentiellement :

$$x(t) = y(t) + e^{-ht} (\text{dépend de la valeur de } h^2 - \omega^2),$$

donc après suffisamment long temps la partie exponentielle sera tellement petite qu'on ne pourra plus la détecter et donc la solution aura un comportement purement oscillatoire avec fréquence  $\omega_1$ . De plus la dépendance des conditions initiales est contenue dans cette partie exponentiellement petite, et donc à cause de l'amortissement, après un certain temps (*transient*) la réponse de l'oscillateur ne dépendra que de la force externe.

Considérons maintenant l'amplitude de la solution après ce transient ; nous pouvons considérer  $A$  comme une fonction de la fréquence externe,  $\omega_1$ , et chercher pour quelle valeur cet amplitude admet un maximum. Un simple calcul montre que la dérivée de  $A(\omega_1)$  vaut zéro si  $\omega_1 = 0$  et si  $\omega_1^2 = \omega^2 - 2h^2$ . Cette deuxième solution est celle qui va nous intéresser et nous pouvons supposer qu'elle soit valable dans le régime de faible amortissement. Si donc  $\omega^2 - 2h^2 > 0$ , alors le maximum de  $A$  vaut :

$$A_{max} = \frac{F}{2h} \frac{1}{\omega^2 + 2}.$$

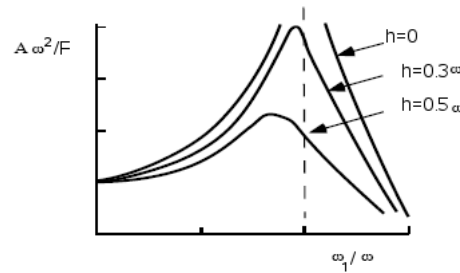


FIG. 3. Maximum de l'amplitude pour l'oscillateur forcé.

On voit que l'amplitude de la réponse présente un maximum pour  $\omega_1 \sim \omega$  et ce maximum dépend de  $1/h$  : de plus l'amortissement est petit de plus ce maximum est grand, et dans la limite  $h \rightarrow 0$  nous avons  $A_{max} \rightarrow \infty$ . C'est le *phénomène de résonance* : si la fréquence externe est très proche de la fréquence propre, alors la réponse peut devenir catastrophique.

**5.6. Battements.** Dans le paragraphe précédent nous avons étudié la réponse d'un oscillateur linéaire avec amortissement soumis à une force externe. Dans cette section nous allons considérer le dernier cas laissé ouvert, c'est-à-dire la réponse d'un oscillateur harmonique à une force externe périodique.

Supposons que la fréquence propre,  $\omega$ , et la fréquence externe,  $\omega_1$ , ne soient pas égales, alors la solution s'écrit comme :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1).$$

La réponse est maintenant toujours oscillatoire, et si les fréquences sont proches mais distinctes nous sommes en présence d'un phénomène bien connu par les musiciens : *les battements*. La réponse a presque la fréquence propre mais l'amplitude aussi admet une oscillation dans le temps, avec une fréquence très petite et donc avec une période très grande. Si la réponse est une onde sonore, nous pouvons entendre une note de fréquence bien définie, mais dont l'intensité varie dans le temps.

D'un point de vu mathématique nous pouvons nous limiter au cas suivant sans perte de généralité :

$$A = A_1, \quad \phi = \phi_1 \quad \text{et} \quad \omega_1 = \omega + \delta,$$

où  $0 < \delta \ll 1$  est le petit décalage entre les fréquences. Alors un peu de trigonométrie :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b,$$

nous permet de récrire la réponse comme :

$$x(t) = 2A \cos\left(-\frac{\delta t}{2}\right) \sin\left[\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t + \phi\right].$$

Donc  $x(t)$  oscille avec une fréquence proche de  $\omega$  si  $\delta$  est petit, l'amplitude n'est pas constante mais elle oscille avec une fréquence  $\delta$ .

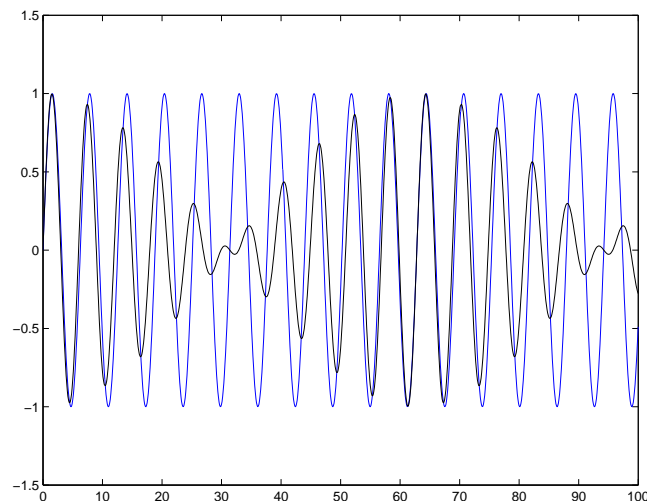


FIG. 4. Phénomène des battements. En bleu la solution homogène et sur posé en noir la réponse, elles oscillent avec deux fréquences très proches, mais les amplitudes sont très différentes.



## CHAPITRE VII

# *Points d'équilibre et Dynamique locale.*

### 1. Introduction

Considérons l'EDO autonome

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{f}$  est une fonction définie et  $\mathcal{C}^1$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Parmi toutes les solutions il peut y avoir les *solutions d'équilibre*. S'il existe  $\mathbf{x}_0$  tel que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ ,  $\mathbf{x}_0$  est appelé aussi *point singulier*, alors

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0,$$

est une solution d'équilibre.

Il y a une autre situation dans la quelle on est emmenés à étudier les racines de  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$  : l'étude du comportement des solutions pour  $t \rightarrow \infty$ . Supposons que la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_+$  existe finie, donc par continuité de  $\mathbf{f}$  nous avons aussi l'existence de la limite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_+)$ . Puisque  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , si  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_+) \neq 0$ , alors pour  $t$  "grand" nous avons  $\mathbf{x}(t) \sim \mathbf{f}(\mathbf{u}_+)t$ , qui est en contradiction avec l'existence de la limite de  $\mathbf{x}(t)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ ; donc il faut supposer  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_+) = 0$ . En d'autres termes si une solution admet une limite pour  $t \rightarrow \infty$  alors cette limite doit être un point singulier de  $\mathbf{f}$ .

Dans la suite nous étudierons les possibles comportements des solutions dans le voisinage d'un point singulier dans un cas simple :  $\mathbf{f}$  est *linéaire* et  $n = 2$ .

Dans le Chapitre VIII nous considérerons quelques applications de la Théorie présentée ici.

### 2. Points singuliers pour EDO linéaire à coefficients constants homogènes dans $\mathbb{R}^2$

Considérons une EDO linéaire à coefficients constants homogène dans le plan, nous pouvons toujours supposer que le point singulier (le zéro de l'application linéaire) coïncide avec l'origine (en fait nous pouvons faire un changement des coordonnées linéaire pour nous ramener en ce cas). Soient donc le coordonnées  $(x_1, x_2)$  telles que l'EDO est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases}$$

ou sous forme vectorielle

$$(VII.2.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x},$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  et  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .



Nous supposons aussi que l'origine soit le seul point singulier (au moins localement), et pour cela est nécessaire et suffisant <sup>1</sup> que  $\det A \neq 0$ , qui revient à dire que aucune valeur propre est égal à zéro.

Nous avons déjà vu que la solution peut être écrite comme  $\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0$ . Pour calculer l'exponentielle de la matrice  $At$  nous utilisons les deux remarques suivantes :

REMARQUE 2.1. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices, supposons il existe une troisième matrice non singulière  $C$  ; si  $AC = CB$  alors  $e^{At}C = Ce^{Bt}$ .

On peut démontrer par récurrence que  $A^k C = CB^k$  : pour  $k = 1$  la thèse est vraie, nous le supposons pour  $k > 1$  et le démontrons pour  $k + 1$  avec

$$A^{k+1}C = AA^kC = ACB^k = CBB^k = CB^{k+1}.$$

Donc avec la définition d'exponentielle de matrice

$$e^{At}C = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k C = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} CB^k = Ce^{Bt}.$$

Donc si  $C$  est une matrice telle que  $C^{-1}AC = A_{diag}$ , où  $A_{diag} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  alors :

$$e^{At} = C^{-1}e^{A_{diag}t}C = C^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} C.$$

REMARQUE 2.2. Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  et  $\mathbf{v}$  le vecteur propre associé, alors  $\phi(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$  est une solution.

Par définition  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  et donc

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}A\mathbf{v} = A\phi(t).$$

La solution générale sera donc donnée par une combinaison linéaire des solutions propres :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2,$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes arbitraires quelconques, déterminées par les conditions initiales.

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont deux valeurs propres distinctes et  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  les vecteurs propres associés, alors  $\Phi(t) = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2)$  est une matrice fondamentale et

$$e^{At} = \Phi(t)\Phi^{-1}(0).$$

Pour avoir une description précise de la dynamique autour du point singulier nous allons analyser les différents cas possibles pour les valeurs propres.

**2.1. Valeurs propres réelles et distinctes.** Si les valeurs propres sont réelles et distinctes, alors nous pouvons déterminer deux vecteurs  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , distincts avec composantes réelles, qui seront les vecteurs propres. La remarque 2.2 nous permet d'affirmer que la solution générale est de la forme :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

Si  $c_1 = c_2 = 0$  nous avons la dynamique de l'origine : le point d'équilibre qui ne bouge pas. Si  $c_1 = 0$  et  $c_2 \neq 0$  alors l'orbite décrit la droite repérée par le vecteur

<sup>1</sup>Si  $\det A = 0$  alors ils existent  $\lambda$  et  $\mu$  réels non nuls tels que  $\lambda(a_{11}, a_{12}) = \mu(a_{21}, a_{22})$ , donc le système  $A\mathbf{x} = 0$  admet comme solution la droite  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0$ , c'est-à-dire il y a des points singuliers autant proche qu'on veuille de d'origine.

$\mathbf{v}_2$  vers l'origine si  $\lambda_2 < 0$  pour  $t > 0$  et en s'éloignant de l'origine pour  $t < 0$ . D'une façon similaire nous pouvons décrire les autres cas, ce que nous allons faire dans la partie restante de cette section.

**2.1.1. Nœuds : Stables et Instables.** Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$  nous avons un *Nœud Stable* et si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  un *Nœud Instable*. Nous allons considérer seulement le premier cas, étant le deuxième similaire.

Toute trajectoire converge vers l'origine quand  $t \rightarrow +\infty$  et diverge à " $\infty$ " pour  $t \rightarrow -\infty$ , non seulement les orbites sur les droites  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . De plus si on part "loin" de la droite  $\mathbf{v}_1$  (qui correspond à la valeur propre plus petite), donc  $c_2 \neq 0$ , l'orbite tend vers l'origine (si  $t > 0$ ) avec comme *tangente* la direction de  $\mathbf{v}_2$ , en fait :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \left( \mathbf{v}_2 + \frac{c_1}{c_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 \right),$$

et puisque  $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$ , l'exponentielle est "très petite" si  $t$  est grand positif, donc  $\mathbf{x}(t)$  est presque parallèle à  $\mathbf{v}_2$  si  $t$  est grand. Si  $t$  est très négatif, alors c'est  $\lambda_1$  qui domine :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \left( \mathbf{v}_1 + \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \mathbf{v}_2 \right),$$

c'est-à-dire l'orbite vient de l'infini en suivant des directions parallèles à  $\mathbf{v}_1$ .

La Figure 1 montre un exemple de Nœud Stable pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x - y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = -\frac{13}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41},$$

et la Figure 2 montre un exemple de Nœud Instable pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

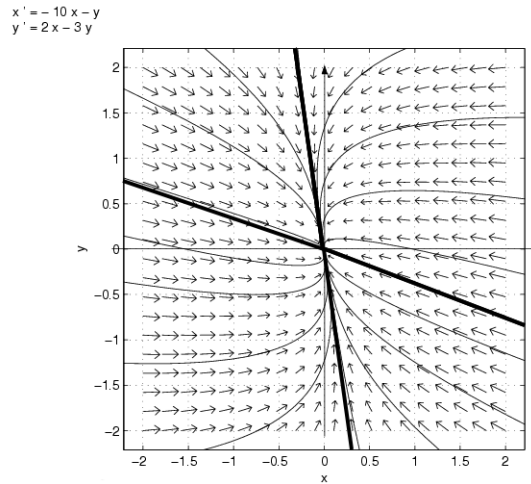


FIG. 1. Nœud Stable pour le système :  $\dot{x} = -10x - y$   $\dot{y} = 2x - 3y$ .

Dans chaque Figure nous avons représenté par des flèches les *directions du champs de vecteurs* (c'est-à-dire la tangente à l'orbite qui passe par le point en question), le ligne en trait épais correspondent à les *droites des vecteurs propres* et les lignes en trait fin sont des orbites.

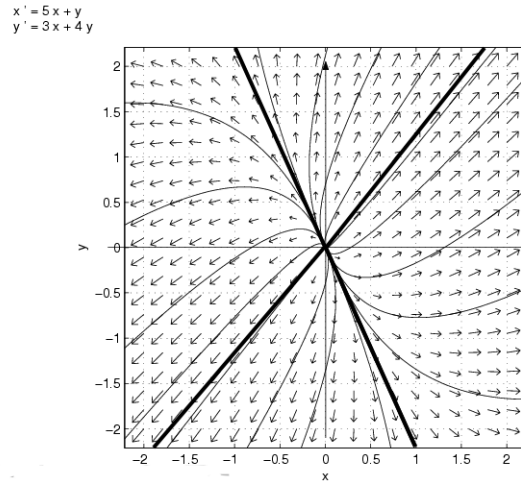


FIG. 2. Nœud Instable pour le système :  $\dot{x} = 5x + y$   $\dot{y} = 3x + 4y$ .

**2.1.2. Point selle.** Les valeurs propres sont de signes opposés, pour fixer les idées supposons  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Soient encore  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  les respectives vecteurs propres, alors l'orbite de condition initiale sur la droite de direction  $\mathbf{v}_1$  ( $c_1 \neq 0$  et  $c_2 = 0$ ) approche l'origine si  $t \rightarrow +\infty$  et s'en éloigne si  $t \rightarrow -\infty$ , toujours en restant sur cette droite. Pour  $\mathbf{v}_2$  ( $c_1 = 0$  et  $c_2 \neq 0$ ) la situation est opposée : l'orbite s'éloigne de l'origine (en restant sur la droite  $\mathbf{v}_2$ ) pour  $t \rightarrow +\infty$ , et s'approche de l'origine pour  $t \rightarrow -\infty$ .

Ces sont les seules orbites qui peuvent atteindre l'origine (le point singulier), toute autre orbite arrive proche (autant que l'on veut) à l'origine pour après s'en éloigner indéfiniment (elle diverge à l'infini).

Écrivons encore une fois la solution comme combinaison linéaire des solutions fondamentales :  $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ , alors une orbite générique ( $c_1 \neq 0$  et  $c_2 \neq 0$ ) tendra vers la direction  $\mathbf{v}_1$  (direction relative à la valeur propre négative) pour  $t \rightarrow -\infty$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \left( \mathbf{v}_1 + \frac{c_2}{c_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \mathbf{v}_2 \right),$$

et puisque  $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$  pour  $t$  très négatif le deuxième terme est très petit.

Par contre une orbite générique ( $c_1 \neq 0$  et  $c_2 \neq 0$ ) tendra vers la direction  $\mathbf{v}_2$  (direction relative à la valeur propre positive) pour  $t \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{x}(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \left( \mathbf{v}_2 + \frac{c_1}{c_2} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 \right),$$

et cette fois  $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$  et si  $t$  est grand alors le deuxième terme est très petit.

Dans la Figure 3 nous montrons un exemple de point selle pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = 7x + y \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{15}.$$

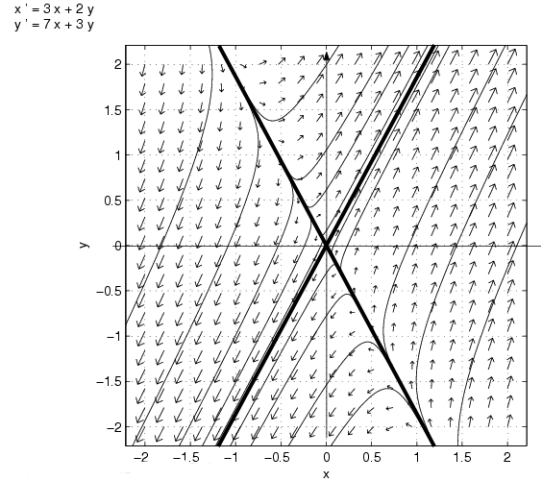


FIG. 3. Point Selle pour le système :  $\dot{x} = 3x + 2y$   $\dot{y} = 7x + y$ .

**2.2. Valeurs propres complexes.** Assumons maintenant que les valeurs propres soient complexes, donc elles doivent être *complexes conjuguées* puisque le système est réel, posons donc  $\lambda_1 = \mu + i\nu$  et  $\lambda_2 = \mu - i\nu$ , avec  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$  et  $\nu \neq 0$ . Nous pouvons déterminer des vecteurs propres complexes conjugués,  $\mathbf{v}$  et  $\bar{\mathbf{v}}$  (car si  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  alors  $A\bar{\mathbf{v}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}}$  en étant  $A$  réelle) et donc la solution générale peut s'écrire comme :

$$\mathbf{x}(t) = c\mathbf{v}e^{(\mu+i\nu)t} + \bar{c}\bar{\mathbf{v}}e^{(\mu-i\nu)t},$$

avec  $c$  constante arbitraire *complexe*.

Nous pouvons introduire deux vecteurs réels <sup>2</sup> linéairement indépendants  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  tels que :  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ , c'est-à-dire  $\mathbf{v}_1 = \Re\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_2 = \Im\mathbf{v}$ . Ces vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^2$  et donc la solution  $\mathbf{x}(t)$  admet une écriture dans cette base (voir Fig. 4) :

$$\mathbf{x}(t) = \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2.$$

<sup>2</sup>Attention : ces vecteurs ne sont pas des vecteurs propres, car

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_1 &= \Re(A\mathbf{v}) = \Re[(\mu + i\nu)\mathbf{v}] = \mu\mathbf{v}_1 - \nu\mathbf{v}_2 \\ A\mathbf{v}_2 &= \Im(A\mathbf{v}) = \Im[(\mu + i\nu)\mathbf{v}] = \nu\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2. \end{aligned}$$

Par exemple si  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  alors un simple calcul permet de montrer que  $\lambda = \alpha + i\beta$  et  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ , donc  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Si dans la base  $\langle \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}} \rangle$  la matrice  $A$  est diagonale, dans la base  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$  elle a la forme initiale.

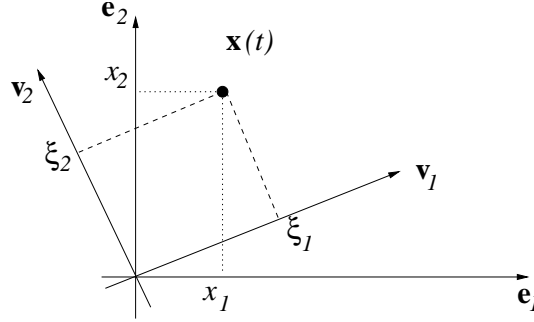


FIG. 4. Géométrie pour le changement de base.

Les composantes de  $\mathbf{x}(t)$  dans les deux systèmes sont liées par :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= c\mathbf{v}e^{\lambda t} + \bar{c}\bar{\mathbf{v}}e^{\bar{\lambda}t} = c(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2)e^{\lambda t} + \bar{c}(\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2)e^{\bar{\lambda}t} \\ &= \mathbf{v}_1(ce^{\lambda t} + \bar{c}e^{\bar{\lambda}t}) + \mathbf{v}_2(ice^{\lambda t} - i\bar{c}e^{\bar{\lambda}t}) = 2\Re(ce^{\lambda t})\mathbf{v}_1 + 2\Im(ce^{\lambda t})\mathbf{v}_2 \\ &= \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\xi_1(t) = 2\Re(ce^{\lambda t}) \quad \text{et} \quad \xi_2(t) = 2\Im(ce^{\lambda t}).$$

La distance du point  $\mathbf{x}(t)$  de l'origine est donc :

$$|\mathbf{x}(t)| = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = 4|c|^2 e^{2\mu t},$$

nous pouvons aussi calculer sa position angulaire (par rapport à l'axe des abscisses par exemple) mais le calcul devient vite long, nous allons donc identifier le point  $(\xi_1, \xi_2)$  avec un point dans le plan complexe :  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \equiv ce^{(\mu+i\nu)t}$ , et donc nous allons obtenir son module :

$$|\zeta(t)| = 2|c|e^{\mu t},$$

et sa position angulaire (par rapport à l'axe des abscisses, ici  $\Re\zeta$ ) :

$$\phi(t) = \arg(c) + i\nu t,$$

où  $\arg(c)$  est l'argument du nombre complexe  $c$ . Nous concluons donc que le comportement des solutions est fortement déterminé par le signe de  $\mu$  (la partie réelle du valeur propre, dans les paragraphes suivants nous allons considérer les cas possibles).

**2.2.1. Foyer Stable et Instable.** Si  $\mu < 0$  alors toute orbite tend vers l'origine pour  $t > 0$  car sa distance diminue exponentiellement, et diverge à l'infini pour  $t < 0$  en suivant la trajectoire d'une *spirale logarithmique*, l'origine est appelée *foyer stable*. Si  $\mu > 0$  la situation est inversée et on parle de *foyer instable*. Considérons le premier cas.

Considérons à nouveau la nombre complexe  $\zeta$ , c'est-à-dire le point dans la base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  :  $\zeta = |\zeta|e^{i\arg\zeta}$ , en écrivant la constante  $c$  comme  $c = Re^{i\alpha}$ , alors l'orbite est décrite par

$$|\zeta|(t) = Re^{\mu t} \quad \text{et} \quad \arg\zeta(t) = \nu t + \alpha.$$

Puisque  $\mu < 0$  nous avons  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\zeta|(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\zeta|(t) = +\infty$ , par contre  $\arg\zeta(t)$  n'admet pas de limite en étant une fonction monotone non-bornée de  $t$

(croissante si  $\nu > 0$  et décroissante autrement). Dans les coordonnées de départ nous aurons une spirale *déformée* à cause du changement de base :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}_2 = |\zeta| (\cos \arg \zeta \mathbf{v}_1 + \sin \arg \zeta \mathbf{v}_2) \\ &= Re^{\mu t} (\cos(\nu t + \alpha) \mathbf{v}_1 + \sin(\nu t + \alpha) \mathbf{v}_2) .\end{aligned}$$

EXEMPLE 2.3 (Foyer instable). *Considérons l'exemple suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - 2y \\ \dot{y} &= x + y , \end{cases}$$

on peut aisément vérifier que les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 1 - i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 + i\sqrt{2} ,$$

avec vecteurs propres complexes

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ i\sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{v}} .$$

On peut choisir les vecteurs réels :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{pmatrix} .$$

La solution générale est donc

$$\mathbf{x}(t) = Re^t \left( \cos(\sqrt{2}t + \alpha) \mathbf{v}_1 + \sin(\sqrt{2}t + \alpha) \mathbf{v}_2 \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \cos(\sqrt{2}t + \alpha) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{2}t + \alpha) \end{pmatrix} .$$

avec  $R$  et  $\alpha$  constantes réelles positives. La Figure 5 représente quelques orbites pour ce système.

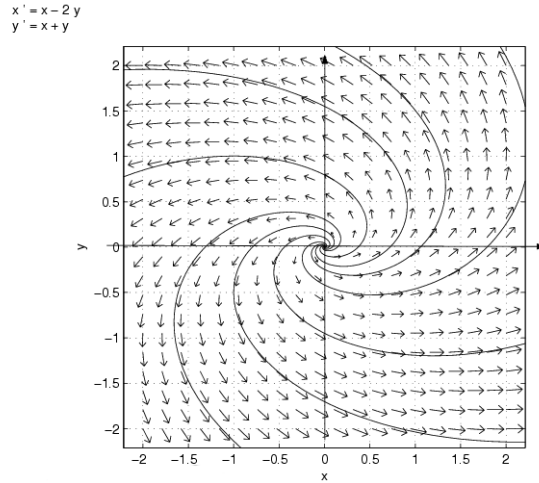


FIG. 5. Foyer Instable pour le système :  $\dot{x} = x - 2y$   $\dot{y} = x + y$ .

2.2.2. **Centre.** Si  $\mu = 0$  alors le module de  $\zeta$  (coordonnées complexe) ne change pas dans le temps, donc le point décrit un *cercle*, dans les coordonnées  $\xi_1, \xi_2$  ce cercle est déformé en une *ellipse*.

EXEMPLE 2.4 (Centre). *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y \\ \dot{y} &= 2x - y, \end{cases}$$

les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = i \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -i,$$

avec vecteurs propres

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{v}};$$

les vecteurs :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$\mathbf{x}(t) = R \cos((\alpha + 1)t) \mathbf{v}_1 + R \sin((\alpha + 1)t) \mathbf{v}_2,$$

avec  $R$  et  $\alpha$  constantes réelle positives.

Si on appelle  $x_1$  et  $x_2$  ses composantes, c'est-à-dire  $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}R \cos((\alpha + 1)t)$  et  $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}R \cos((\alpha + 1)t) + \frac{1}{\sqrt{3}}R \sin((\alpha + 1)t)$ , nous avons aussi :

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{2}{3}R^2,$$

qui donne l'équation cartésienne de l'ellipse (voir § A.5 pour la détermination du type d'une conique dans le plan). La Figure 6 montre quelques orbites pour ce centre.

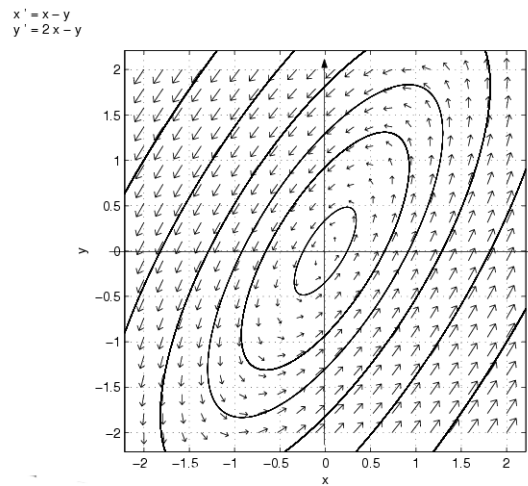


FIG. 6. Centre pour le système :  $\dot{x} = x - y$   $\dot{y} = 2x - y$ .

**2.3. Cas dégénéré : valeurs propres égales.** Il nous reste un dernier cas à étudier : quand les valeurs propres sont égales et réelles  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (*multiplicité algébrique* égale à 2). Cette situation est appelée généralement *Nœud dégénéré* même si elle donne lieu à deux comportements différents.

REMARQUE 2.5. *Cette situation est appelée dégénéré à différence des tous les cas vus dans les sections précédentes qui sont appelés non dégénéré, sauf le centre qui lui aussi résulte dans cette catégorie. La raison est la suivante, dans tous les cas non dégénéré les valeurs propres sont distinctes et non nulles, donc nous pouvons modifier légèrement les éléments de la matrice  $A$  sans changer la relation entre les valeurs propres et donc les orbites non plus ne seront pas très différentes avant et après. Dans le cas dégénéré même un changement très faible de la matrice  $A$  peut modifier l'égalité entre les valeurs propres ou bien le fait que la partie réelle soit égale à zéro.*

**2.3.1. Nœud dégénéré : Cas I.** Il existe une base  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  composée de deux vecteurs propres de  $A$  (*multiplicité géométrique* égale à 2) :

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 \quad \text{et} \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda\mathbf{v}_2,$$

dans ce cas la solution générale de l'EDO est donnée par :  $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)$ . Donc toute solution décrit une demi-droite qui passe par l'origine et avec direction  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ . Comme la Figure 7 présente pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 2y \end{cases} \quad \lambda = 2.$$

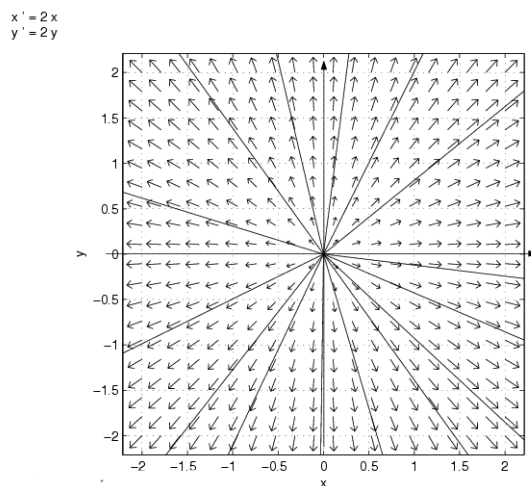


FIG. 7. Nœud dégénéré instable pour le système :  $\dot{x} = 2x$   $\dot{y} = 2y$ .

**2.3.2. Nœud dégénéré : Cas II.** Supposons maintenant que  $\text{Ker}(A - \lambda\mathbb{I})$  ait dimension un (*multiplicité géométrique* égale à 1), il existe donc un vecteur propre  $\mathbf{v}_1$  et un vecteur  $\mathbf{v}$ , tel que  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}$  soient linéairement indépendants et

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1 \quad \text{et} \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{v}_1.$$



Dans cette base la matrice  $A$  peut être écrite comme  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \neq 0$ , et donc la solution générale est de la forme (calcul de  $e^{At}$ ) :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 (t \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}) e^{\lambda t}.$$

Dans les coordonnées associées à cette base, nous avons  $\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}$ ,  $\xi_1 = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$  et  $\xi_2 = c_2 e^{\lambda t}$ .

Supposons  $\lambda < 0$  (la cas  $\lambda > 0$  est similaire et nous ne le considérons pas). Si  $c_2 = 0$  l'orbite décrit la demi-droite repérée par  $\mathbf{v}_1$  en s'approchant à l'origine; si  $c_1 = 0$  alors  $\xi_1 = c_2 t e^{\lambda t}$  et  $\xi_2 = c_2 e^{\lambda t}$ , pour  $t = 0$  le point est en  $(0, c_2)$ , pour  $t$  qui tend vers  $-\infty$ ,  $\xi_1$  et  $\xi_2$  deviennent grands (en valeur absolue) et de signes opposés (le signe dépend de  $c_2$ ). Puisque la fonction  $t e^{\lambda t}$  a un seul maximum absolu et tend vers zéro quand  $t \rightarrow +\infty$ , nous avons que  $\xi_1$  croît en valeur absolue jusqu'à une certaine valeur de  $t$  et après décroît en valeur absolue jusqu'à zéro,  $\xi_2$  décroît en valeur absolue à zéro. Cela en décrivant une S, ou Z, comme montré dans la Figure 8 pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{2} + y \\ \dot{y} = -\frac{y}{2} \end{cases}.$$

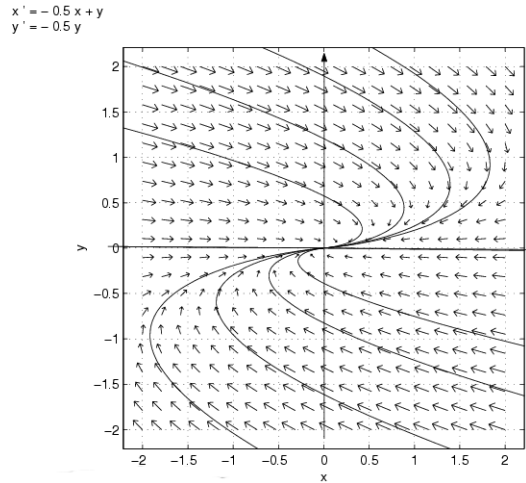


FIG. 8. Nœud dégénéré stable pour le système :  $\dot{x} = -\frac{x}{2} + y$   $\dot{y} = -\frac{y}{2}$ .

Dans les coordonnées initiales le S ou Z sera étiré et déformé à cause du changement de base.

**2.4. Valeurs propres nulles.** Dans ce dernier paragraphe nous allons considérer le cas avec valeurs propres égale à zéro, nous devons distinguer deux sous cas :  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$  où bien  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

**2.4.1.  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$ .** Si  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  sont les vecteurs propres de  $A$ , la solution générale est de la forme

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2,$$

donc toute solution avec  $c_1 = 0$  (c'est-à-dire sur la droite repérée par  $\mathbf{v}_2$  est une solution stationnaire, par contre si  $c_1 \neq 0$ , pour  $t$  grand l'orbite se dirige en ligne droite vers cette droite (si  $\lambda_1 < 0$ ). Voir Figure 9 pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x + 2y \\ \dot{y} &= -3x + 6y. \end{cases}$$

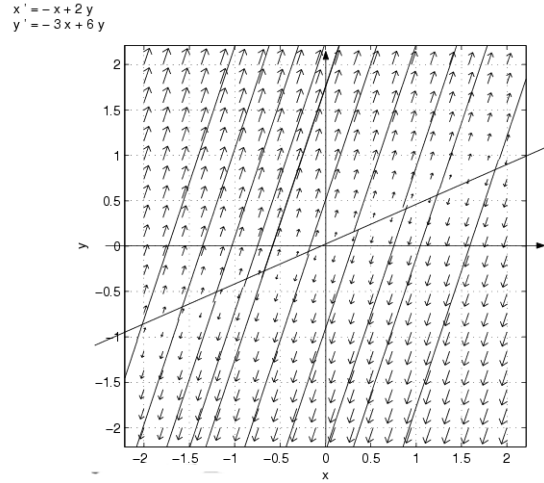


FIG. 9.  $\lambda_1 \neq 0$  et  $\lambda_2 = 0$ , pour le système :  $\dot{x} = -x + 2y$   $\dot{y} = -3x + 6y$ .

2.4.2.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Nous avons ici deux cas possibles : ou bien la matrice  $A = 0$  et donc toute solution est une solution stationnaire, ou bien la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \neq 0$ . Dans ce cas (voir § 2.3.2) la solution générale est de la forme  $\mathbf{x}(t) = (c_1 + c_2 t)\mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}$ , et donc chaque orbite décrit une droite parallèle à la direction  $\mathbf{v}$ .



## CHAPITRE VIII

### ***Applications : dynamique des populations.***

#### **1. Modèles de croissance de populations**

Dans ce Chapitre nous montrerons certaines applications de la Théorie vue dans le Chapitre précédent, notamment nous étudierons quelques modèles de croissance de populations. Nous analyserons ces modèles avec la *Théorie Qualitative*, c'est-à-dire nous chercherons à déterminer le comportement qualitatif d'une solution (est-ce qu'elle diverge à l'infini ? Ou bien elle s'accumule sur un point singulier ? Ou encore elle oscille) plutôt qu'en déterminer une solution explicite.

Dans la première section nous considérons un simple modèle, dit de *Verhulst* où *logistique*, pour décrire la croissance d'une seule population ; dans la section suivante nous étudierons un modèle pour décrire deux populations en compétition pour la nourriture. Finalement dans la dernière section nous considérerons un modèle à deux populations où une est une proie pour la seconde.

#### **2. Un modèle de croissance d'une population**

Considérons une population *isolée* et désignons par  $x(t)$  le nombre d'individus présents au temps  $t$  dans la population.

Si à un certain temps  $\bar{t}$  la population contient "peu d'individus",  $x(\bar{t})$  est petit, on peut assumer que dans les instants suivant la population grandisse en proportion du nombre d'individus :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x,$$

où  $\alpha > 0$  est appelé *taux de croissance*. L'idée derrière ce modèle est que s'il y a peu d'individus, alors il y a de la nourriture (ressources) suffisante pour tous et donc il y aura plus de naissances que de décès.

Ce modèle n'est pas réaliste, puisque nous avons déjà vu que la solution de cette EDO est donnée par

$$x(t) = e^{\alpha(t-\bar{t})}x(\bar{t}),$$

donc une population qui *croît de façon exponentielle* ! Il faut donc tenir en compte qu'à un certain moment il y aura "trop d'individus" dans la population et il n'y aura pas assez de nourriture pour tous. Voilà qu'à ce moment le modèle ne sera plus correct. La façon plus simple d'introduire cette limitation due à la population elle-même, est de considérer un terme toujours négatif qui "domine" par rapport au terme  $\alpha x$  si  $x$  est grand, un choix convenable est

$$(VIII.2.1) \quad \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2,$$

où  $\beta > 0$ , le terme  $\beta x^2$  peut être interprété comme la compétition de deux individus pour la nourriture commune, avec une force  $\beta$ .

Cette équation avec une donnée initiale  $x(t_0)$  est appelée en littérature modèle de *Verhulst* ou *logistique*, ou encore de *Landau*. Le modèle est si simple que nous pouvons déterminer les solutions explicitement.

Si la donnée initiale vérifie :

$$x(t_0) = 0 \quad \text{ou} \quad x(t_0) = \frac{\alpha}{\beta},$$

alors on a une *solution stationnaire* :

$$x(t) = 0 \quad \text{ou} \quad x(t) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \forall t.$$

A cause du Théorème d'existence (vérifiez que notre modèle satisfait aux hypothèses du Théorème de Picard) toute autre solution ne pourra pas assumer ces valeurs, 0 et  $\alpha/\beta$ , pour aucun temps, donc toute autre solution vérifiera  $x(t) \neq 0$  et  $x(t) \neq \alpha/\beta$ . L'EDO peut être réécrite comme

$$(VIII.2.2) \quad \frac{1}{\alpha x - \beta x^2} \frac{dx}{dt} = 1,$$

le facteur à gauche peut être réécrit comme

$$\frac{1}{\alpha x - \beta x^2} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{x} + \frac{\beta}{\alpha - \beta x} \right),$$

et donc en intégrant (VIII.2.2) entre  $t$  et  $t_0$  nous avons

$$\alpha(t - t_0) = \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{x(s)} + \frac{\beta}{\alpha - \beta x(s)} \right) \frac{dx(s)}{ds} ds.$$

On peut faire un changement de variable d'intégration et intégrer en  $dx$  :

$$\alpha(t - t_0) = \int_{x(t_0)}^{x(t)} \left( \frac{1}{x} + \frac{\beta}{\alpha - \beta x} \right) dx;$$

cette intégrale peut être directement calculée :

$$\alpha(t - t_0) = \log \frac{x(t)}{x(t_0)} - \log \left| \frac{\alpha - \beta x(t)}{\alpha - \beta x(t_0)} \right|,$$

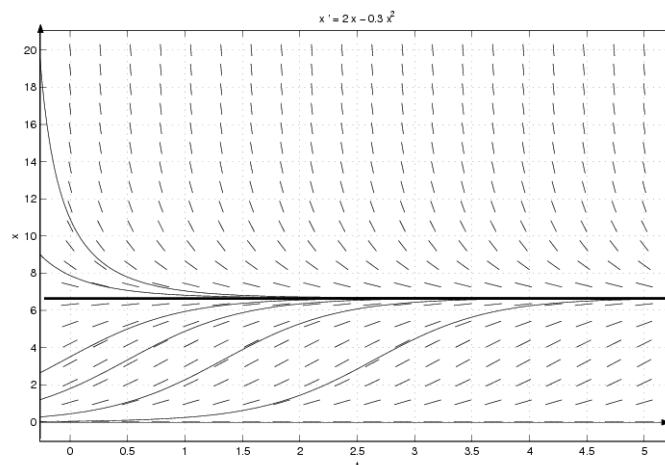
et résolue par rapport à  $x(t)$  nous donne :

$$x(t) = \frac{\alpha}{\beta + \frac{\alpha - \beta x(t_0)}{x(t_0)} e^{-\alpha(t-t_0)}}.$$

Une fois que nous avons la solution explicite nous pouvons étudier le comportement du système en étudiant la graphie de la fonction  $x(t)$ , mais dans la plupart de cas nous ne savons (pouvons) pas déterminer une solution explicite et d'ailleurs pour beaucoup de question ce n'est pas important d'avoir une solution explicite. C'est pour cela que nous allons étudier le même système avec la Théorie Qualitative.

Nous ferons les considérations suivantes en nous référant à la Figure 1.

Nous connaissons déjà les solutions stationnaire (ou d'équilibre)  $x(t) = 0$  et  $x(t) = \alpha/\beta$ . Si maintenant nous partons avec une donnée initiale  $x(0) \in (0, \alpha/\beta)$  alors à cause de l'EDO  $\dot{x}(0) > 0$  et donc  $x(t)$  est une fonction croissante du temps (au moins pour  $t$  petit). Pendant que  $x(t) \in (0, \alpha/\beta)$ , alors  $\dot{x}(t) > 0$  et donc  $x(t)$  est monotone croissante. Mais à fur et à mesure que  $x(t)$  s'approche de la valeur  $\alpha/\beta$ , la dérivée  $\dot{x}$  devient de plus en plus petite (mais toujours positive) et elle s'annule quand  $x(t) = \alpha/\beta$ , mais cette valeur ne peut pas être rejointe en temps fini (encore

FIG. 1. Portrait de phase du modèle logistique pour  $\alpha = 2$  et  $\beta = 0.3$ .

Théorème unicité) et donc une solution que part avec  $x(0) \in (0, \alpha/\beta)$  reste toujours confinée dans cet intervalle et admet comme limite ( $t \rightarrow +\infty$ ) la valeur  $\alpha/\beta$ .

Si  $x(0) > \alpha/\beta$ , alors  $\dot{x}(0) < 0$  et la solution est décroissante donc elle reste bornée pour tout temps. Quand  $\alpha/\beta < x(t) < x(0)$ , la dérivée est toujours négative et donc  $x(t)$  décroît ; mais elle ne peut pas rejoindre la valeur  $\alpha/\beta$  en temps fini (Théorème unicité) et donc toute solution qui part de  $x(0) > \alpha/\beta$  tend pour  $t \rightarrow +\infty$  à la valeur  $\alpha/\beta$  de façon monotone.

Si l'équation logistique décrit un modèle de biologie, la valeur  $\alpha/\beta$  est appelée *niveau de saturation* ou *capacité totale* : une population au dessous de cette valeur ne peut jamais l'atteindre, par contre une population au dessus l'aura comme valeur asymptotique. La solution d'équilibre  $\alpha/\beta$  est dite *stable* puisque toute orbite qui démarre dans un voisinage est "attiré" par cette solution, par contre la solution 0 est *instable* toute orbite qui démarre dans un voisinage, autant proche qu'on veuille de 0, s'en éloigne indéfiniment.

D'un point de vu mathématique l'équation logistique a une valeur propre *positive*,  $\alpha$ , si on la linéarise (on ne garde que les termes linéaires et on jette tout le reste) autour de  $x = 0$ . Par contre si on linéarise autour de  $x = \alpha/\beta$  l'équation a une valeur propre négative,  $-\alpha$ . Pour linéariser autour de  $x = \alpha/\beta$  nous posons  $y = x - \alpha/\beta$  et donc l'EDO est réécrite comme

$$\dot{y} = \dot{x} = \alpha \left( y + \frac{\alpha}{\beta} \right) - \beta \left( y + \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 = -\alpha y - \beta y^2,$$

si  $x \sim \alpha/\beta$  alors  $y \sim 0$  et donc linéariser revient à jeter tous les termes (en  $y$ ) qui ne sont pas linéaires.

### 3. Un modèle avec deux espèce en compétition

Considérons maintenant un modèle pour deux populations en compétition pour la nourriture, par exemple deux espèce de poissons qui vivent dans un lac en compétition pour la même nourriture mais qui ne sont pas prédateurs l'un des autres.

Soit  $x(t)$  la population de la première espèce au temps  $t$ , et  $y(t)$  celle la de la deuxième espèce. Par ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent, en l'absence de l'autre espèce chacune suit la loi

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha_1 x - \beta_1 x^2 \\ \dot{y} &= \alpha_2 y - \beta_2 y^2, \end{cases}$$

avec tous les coefficients sont positifs.

Cependant quand les deux espèces sont présentes, elles vont être en compétition pour la nourriture et donc la croissance de chaque espèce est aussi déterminé par la présence de l'autre. Nous pouvons décrire cela comme suit :

$$(VIII.3.1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= \alpha_1 x - \beta_1 x^2 - \gamma_1 xy \\ \dot{y} &= \alpha_2 y - \beta_2 y^2 - \gamma_2 xy, \end{cases}$$

où les termes  $\gamma_j xy$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , décrivent l'interaction (compétition) des deux espèces pour la nourriture. Le coefficient  $\gamma_1 > 0$  donne la "dégré" avec lequel la première espèce est influencée par la présence de la deuxième, et de façon similaire pour  $\gamma_2 > 0$ .

Puisque nous ne pouvons pas déterminer une solution explicite de (VIII.3.1) nous procéderons avec une analyse qualitative des solutions. La première étape consiste à déterminer les solutions d'équilibre, c'est-à-dire trouver les zéros de

$$\begin{cases} x(\alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 y) = 0 \\ y(\alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_2 x) = 0. \end{cases}$$

Trois premier zéros sont facilement déterminés :

$$(x, y) = (0, 0), (x, y) = \left(0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) \text{ et } (x, y) = \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, 0\right),$$

ces trois positions d'équilibre correspondent au cas où au moins une espèce disparaît (toutes les deux dans le premier cas). Un quatrième éventuel zéro pourrait venir de l'intersection des deux droites :

$$\begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 y = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_2 x = 0. \end{cases}$$

Il y a donc plusieurs cas à étudier selon la disposition relative des points  $\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, 0\right)$ ,  $\left(0, \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)$ ,  $\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_2}, 0\right)$  et  $\left(0, \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)$  dans le plan  $xy$ . Pour cela nous allons commencer par un exemple spécifique.

Considérons les système :

$$(VIII.3.2) \quad \begin{cases} \dot{x} &= x(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y\right). \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont :

$$(x, y) = (0, 0) \quad (x, y) = (1, 0) \quad (x, y) = (0, 2) \text{ et } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

nous allons étudier le comportement des solutions dans un voisinage de chaque point.

**3.1. Analyse du point  $(x, y) = (0, 0)$ .** Nous devons linéariser le système dans un voisinage du point  $(0, 0)$ , et cela revient à oublier tous les termes non linéaires en  $x$  et  $y$ , il nous reste donc :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}y, \end{cases}$$

les valeurs propres sont  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  et les vecteurs propres associés sont  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$  et  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ . Les valeurs propres sont positives et distinctes, donc l'origine est un *nœud instable* (voir § VII.2.1.1). La solution générale est de la forme  $\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^t + c_2 \mathbf{v}_2 e^{t/2}$ , pour  $c_1$  et  $c_2$  constantes réelles. Pour  $c_1 = 0$  l'orbite décrit l'axe  $y$  et pour  $c_2 = 0$  l'axe des  $x$ , en direction de l'origine pour  $t \rightarrow -\infty$ , toute autre solution se dirige vers l'origine pour  $t \rightarrow -\infty$  avec tangente la direction de  $\mathbf{v}_2$  (axe des  $y$ ) :

$$\mathbf{x}(t) = c_2 e^{t/2} \left( \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \frac{c_1}{c_2} e^{t/2} \right),$$

et le dernier terme va à zéro pour  $t \rightarrow -\infty$ .

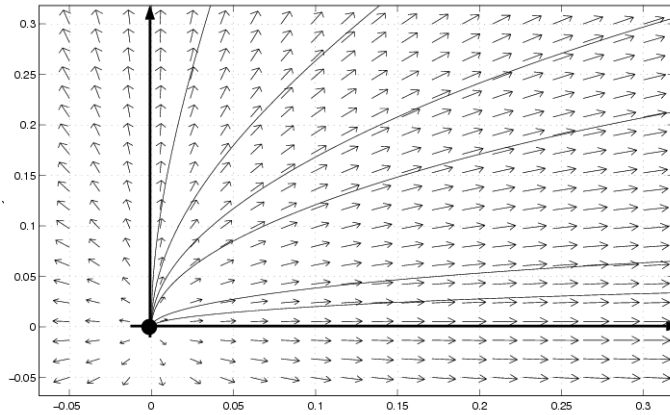


FIG. 2. Portrait de phase du modèle deux espèces dans un voisinage du point  $(0, 0)$

Dans le modèle biologique cette dynamique implique que les deux espèces, si présentes au début, n'iront jamais vers l'extinction totale.

**3.2. Analyse du point  $(x, y) = (1, 0)$ .** Nous devons linéariser le système dans un voisinage du point  $(1, 0)$ , pour cela nous introduisons des nouvelles coordonnées

$$\xi = x - 1 \quad \text{et} \quad \eta = y,$$

dans les quelles nous récrivons le système (VIII.3.2) :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= (\xi + 1)(-\xi - \eta) \\ \dot{\eta} &= \eta \left( -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\eta \right). \end{cases}$$



Si maintenant nous gardons seulement les termes linéaires en  $\xi$  et  $\eta$  nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -\xi - \eta \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{4}\eta, \end{cases}$$

et les valeurs propres sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ . Elles sont négatives et distinctes donc le point  $(1, 0)$  est un *nœud stable* (voir § VII.2.1.1). Si les deux populations démarrent avec des valeurs “assez proches” du point  $(1, 0)$  alors dans le futur la deuxième espèce  $y$  ira vers son *extinction* et la première  $x$  vers son niveau de saturation.

Le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1 = -1$  est  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ , et  $\mathbf{v}_2 = (4, -3)$  est associé à  $\lambda_2 = -1/4$ . Pour le système linéaire nous connaissons les solutions explicites :

$$(\xi(t), \eta(t)) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{-t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{-t/4} = \left( c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{-t/4}, -3c_2 e^{-t/4} \right),$$

si  $c_2 = 0$  le point suit la direction  $\mathbf{v}_1$  (axe  $\xi$  ou bien  $x$ ) vers le point singulier  $(1, 0)$  pour  $t \rightarrow +\infty$ . Si  $c_1 = 0$  le point se dirige vers  $(1, 0)$  pour  $t$  grand en suivant la direction  $\mathbf{v}_2$ . Une solution générale s’approchera du point singulier pour  $t \rightarrow +\infty$  avec comme tangente la direction  $\mathbf{v}_2$  :

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-t/4} \left( \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \frac{c_1}{c_2} e^{-3t/4} \right).$$

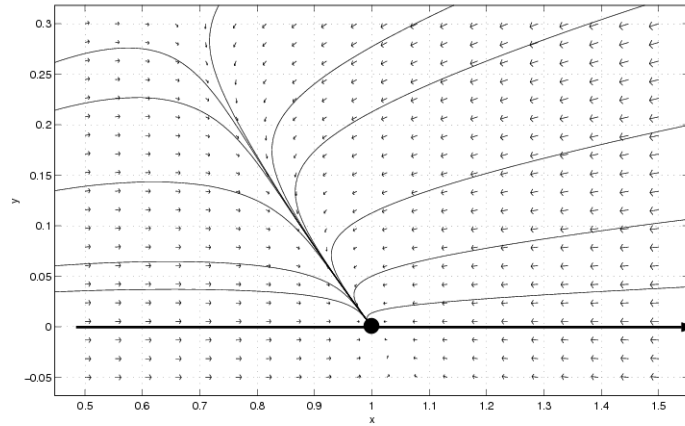


FIG. 3. Portrait de phase du modèle deux espèces dans un voisinage du point  $(1, 0)$

**3.3. Analyse du point  $(x, y) = (0, 2)$ .** Nous devons linéariser le système dans un voisinage du point  $(0, 2)$ , pour cela nous introduisons des nouvelles coordonnées

$$\xi = x \quad \text{et} \quad \eta = y - 2,$$

dans les quelles nous récrivons le système(VIII.3.2) :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \xi(-1 - \xi - \eta) \\ \dot{\eta} &= (\eta + 2)\left(-\frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\eta\right). \end{cases}$$

Si maintenant nous gardons seulement les termes linéaires en  $\xi$  et  $\eta$  nous obtenons

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -\xi - \eta \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{4}\eta, \end{cases}$$

et les valeurs propres sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ . Elles sont négatives et distinctes donc le point  $(0, 2)$  aussi est un *nœud stable* (voir § VII.2.1.1). Si les deux populations démarrent avec des valeurs “assez proches” du point  $(0, 2)$  alors dans le futur la première espèce  $x$  ira vers son *extinction* et la deuxième  $y$  vers son niveau de saturation.

Le vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_1 = -1$  est  $\mathbf{v}_1 = (1, -3)$ , et  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$  celui associé à  $\lambda_2 = -1/2$ . La solution générale est

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{-t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{-t/2},$$

donc pour  $c_2 = 0$  l'origine est atteinte le long de la direction  $\mathbf{v}_1$ , pour  $c_1 = 0$  l'orbite se dirige vers  $(0, 2)$  le long de l'axe  $y$  (direction  $\mathbf{v}_2$ ) et cela est vrai pour toutes les autres orbites :

$$\mathbf{x}(t) = c_2 e^{-t/2} \left( \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \frac{c_1}{c_2} e^{-t/2} \right).$$

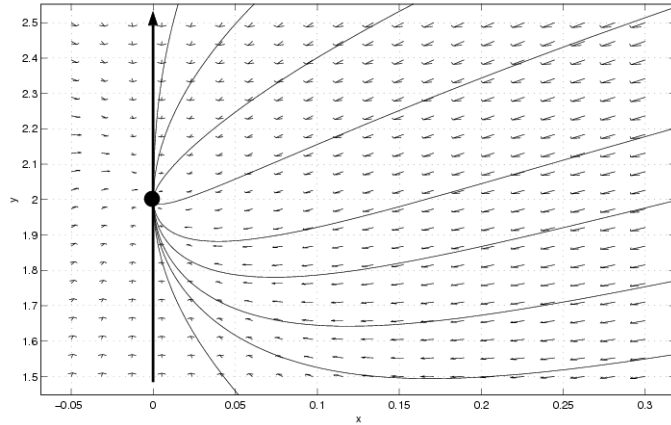


FIG. 4. Portrait de phase du modèle deux espèces dans un voisinage du point  $(0, 2)$

**3.4. Analyse du point  $(x, y) = (1/2, 1/2)$ .** Pour linéariser autour du point singulier  $(1/2, 1/2)$  nous introduisons le changement des coordonnées :

$$\xi = x - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \eta = y - \frac{1}{2},$$

qui permet de récrire le système comme

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -\left(\xi + \frac{1}{2}\right) \left(\xi + \eta\right) \\ \dot{\eta} &= \left(\eta + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\xi + \frac{\eta}{4}\right). \end{cases}$$

La linéarisation consiste à ne retenir que les termes linéaires en  $\xi$  et  $\eta$

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= -\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta \\ \dot{\eta} &= -\frac{3}{8}\xi - \frac{\eta}{8}, \end{cases}$$

les valeurs propres sont  $\lambda_1 = (-5 - \sqrt{57})/16$  avec vecteur propre  $\mathbf{v}_1 = (8, -3 + \sqrt{57})$  et  $\lambda_2 = (-5 + \sqrt{57})/16$  avec vecteur propre  $\mathbf{v}_2 = (8, -3 - \sqrt{57})$ . Les valeurs propres sont réelles, distinctes et de signe opposé, donc le point singulier  $(1/2, 1/2)$  est un *point selle* (voir §2.1.2). L'orbite sur la droite de direction  $\mathbf{v}_1$  s'approche du point singulier pour  $t \rightarrow +\infty$ , et celle sur la droite  $\mathbf{v}_2$  s'éloigne du point  $(1/2, 1/2)$  pour  $t$  grand.

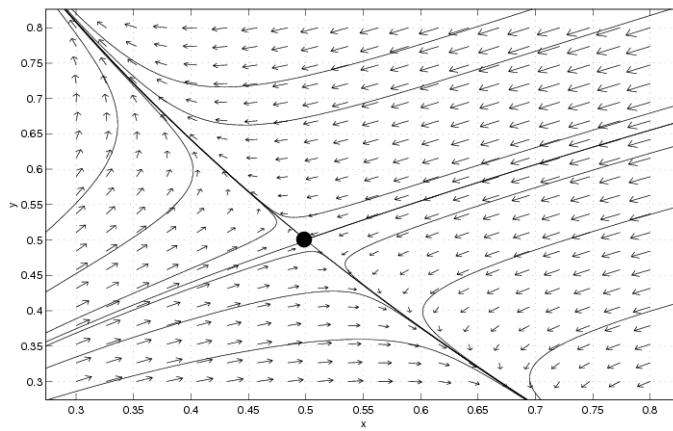


FIG. 5. Portrait de phase du modèle deux espèces dans un voisinage du point  $(1/2, 1/2)$

**3.5. Dynamique globale.** Nous avons ainsi construit les dynamiques *locales* dans des voisinages de chaque point singulier, pour avoir une description complète nous devons déterminer la *dynamique globale*, c'est-à dire *relier les dynamiques locales entre elles*.

Pour cela nous ferons un certain nombre des remarques :

- (1) A cause du Théorème d'unicité les orbites ne peuvent pas se croiser. Mais chaque axe,  $x$  et  $y$ , est composée de quatre orbites (par exemple pour l'axe  $x = \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, +\infty)$ ) et donc une orbite qui démarre dans le premier quadrant,  $x(0) > 0$  et  $y(0) > 0$ , restera toujours dans ce quadrant, et de plus une orbite qui démarre dehors de ce quadrant ne pourra jamais y arriver.
- (2) Si  $x$  et  $y$  sont suffisamment grands alors nous avons  $\dot{x} < 0$  et  $\dot{y} < 0$ , c'est-à dire une orbite qui se trouve dans une zone lointaine de l'origine, aura tendance à s'en approcher. Pour cela ça suffit de regarder directement le système d'EDO :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x(x + y - 1) \\ \dot{y} &= -y\left(\frac{3}{4}x + \frac{y}{4} - \frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

avec  $x > 0$  et  $y > 0$ , la première équation est positive si et seulement si  $x + y - 1 > 0$  et la deuxième si et seulement si  $3x + y - 2 > 0$ , donc pour tous les points  $(x, y)$ , dans le premier quadrant, tels que :

$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ 3x + y - 2 > 0, \end{cases}$$

nous aurons  $\dot{x} < 0$  et  $\dot{y} < 0$ .

- (3) Nous donnons pour acquit le fait suivant : toute orbite tend, pour  $t \rightarrow \infty$ , vers un point singulier, où elle s'accumule sur une orbite périodique, où bien elle diverge à l'infini. Dans notre exemple nous n'avons pas d'orbites périodiques et les orbites ne peuvent pas aller vers l'infini à cause de la remarque précédente. Donc toute orbite doit se diriger vers un de quatre points singuliers.

Une analyse de la “topologie” des orbites possible dans l'espace des phases nous permet de conclure que le *portrait de phase* du système (VIII.3.2) est bien reproduit par la Figure 6.

**3.6. Conclusion.** L'analyse du système de EDO nous a permis de conclure que, génériquement, quel que soit le nombre d'individus de la première et de la deuxième espèce à un temps donné (choix de conditions initiales), alors une des deux espèces va vers son extinction (cela dépend du fait que le point initial soit dans le domaine d'attraction – *bassin d'attraction* – du point stable  $(1, 0)$  ou  $(0, 2)$ ). Cela n'est pas vrai pour les données initiales qui correspondent à la *variété stable* du point selle  $(1/2, 1/2)$ , c'est-à-dire les points dont les orbites convergent vers ce point selle, mais cette condition est “difficilement” vérifiée (dans un ensemble de mesure nulle de l'espace des phase, donc avec probabilité zéro).

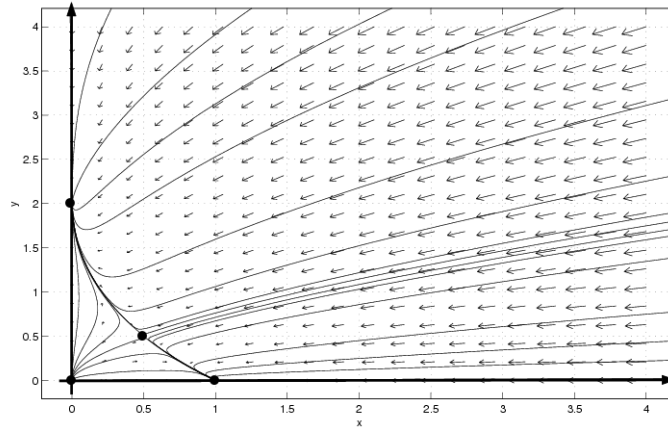


FIG. 6. Portrait de phase globale du modèle deux espèces

**3.7. Retour au système générale (VIII.3.1).** Dans le cas général nous avons un système d'EDO du type (VIII.3.1) :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 y) \\ \dot{y} = y(\alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_2 x) \end{cases},$$

et comme nous avons vu trois points d'équilibre existent toujours, le quatrième (intersection des droites) dépend de la position relative des droites; il y a quatre possibilités décrite dans la Figure 7.

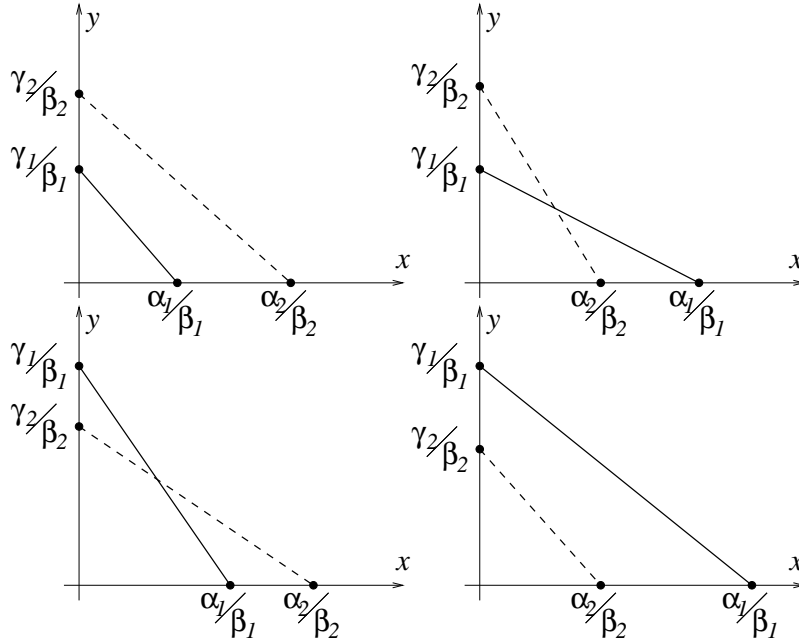


FIG. 7. Les quatre cas possibles pour la position relative des deux droites. Les lignes “plaines” correspondent à l'équation  $\alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 y = 0$  et les lignes “en trait” correspondent à l'équation  $\alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_2 x = 0$ .

En générale la démarche à faire implique une linéarisation dans un voisinage d'un des points d'équilibre qui ne soit pas l'origine (car dans ce cas la situation est beaucoup plus simple et elle ne nécessite pas d'un traitement particulier). Appelons-les génériquement  $(X_E, Y_E)$ , alors nous posons :

$$\begin{cases} x = X_E + u \\ y = Y_E + v \end{cases},$$

et effectuons le changement de variables dans le système (VIII.3.1) et rangeons les termes en gardant seulement les termes au plus linéaires en  $u$  et/ou  $v$  :

$$\begin{cases} \dot{u} = X_E(\alpha_1 - \beta_1 X_E - \gamma_1 Y_E) + u(\alpha_1 - 2\beta_1 X_E - \gamma_1 Y_E) - \gamma_1 X_E v + \dots \\ \dot{v} = Y_E(\alpha_2 - \beta_2 Y_E - \gamma_2 X_E) + v(\alpha_2 - 2\beta_2 Y_E - \gamma_2 X_E) - \gamma_2 Y_E u + \dots \end{cases}$$

Nous observons que le premier terme est toujours zéro, quel que soit le point d'équilibre en question, puisque :

- (1) le point d'équilibre coïncide avec l'origine ;
- (2) le point d'équilibre appartient à une des axes coordonnées : au moins une des coordonnées est zéro et l'autre vaut  $\alpha_j/\beta_j$ ,  $j = 1$  ou  $j = 2$  ;
- (3) le point d'équilibre est donné par l'intersection des deux droites.

Remarquons aussi que si  $X_E = 0$  et/ou  $Y_E = 0$  alors le calcul est plus simple et la linéarisation triviale. Avec un raisonnement similaire on peut vérifier que les coefficients de  $u$  et  $v$  aussi se simplifient ; donc, si  $(X_E, Y_E) \neq (0, 0)$ , le système linéaire associé peut être écrit comme :

$$(VIII.3.3) \quad \begin{cases} \dot{u} &= -\beta_1 X_E u - \gamma_1 X_E v \\ \dot{y} &= -\gamma_2 Y_E u - \beta_2 Y_E v, \end{cases}$$

par contre si  $(X_E, Y_E) = (0, 0)$ , nous avons

$$(VIII.3.4) \quad \begin{cases} \dot{u} &= \alpha_1 u \\ \dot{y} &= \alpha_2 v, \end{cases}$$

et on voit tout de suite que l'origine est un nœud instable : valeurs propres positives et génériquement distinctes.

Nous allons maintenant chercher les valeurs propres associées à ce système linéaire,  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ , où  $A = \begin{pmatrix} -\beta_1 X_E & -\gamma_1 X_E \\ -\gamma_2 Y_E & -\beta_2 Y_E \end{pmatrix}$  :

$$\lambda = \frac{-(\beta_1 X_E + \beta_2 Y_E) \pm \sqrt{(\beta_1 X_E + \beta_2 Y_E)^2 - 4(\beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2) X_E Y_E}}{2}.$$

Pour déterminer le caractère de chaque point d'équilibre nous allons étudier le signe (de la partie réelle, si valeurs propres complexes) des racines  $\lambda_{1,2}$ , pour cela nous distinguerons deux cas :

$$\beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 > 0 \quad \text{et} \quad \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 < 0.$$

Remarquons que avec notre choix initial tous les paramètres sont réels positifs et que les coordonnées des points d'équilibre qui nous intéressent sont elles aussi réelles et positives.

Si  $\beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 < 0$  alors le terme dans la racine est toujours positif et donc nous avons deux valeurs propres réelles, distinctes et de signes opposées. Le point d'équilibre en question est un *point selle*.

Si  $\beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 > 0$  alors le terme dans la racine peut être soit positif que négatif, donc les racine sont réelles, distinctes et négative ou bien complexes conjuguées avec partie réelle négative. Montrons que ce dernier cas n'est pas possible puisque le terme dans la racine est toujours positif :

$$\begin{aligned} (\beta_1 X_E + \beta_2 Y_E)^2 &- 4(\beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2) X_E Y_E \\ &= (\beta_1 X_E)^2 + (\beta_2 Y_E)^2 + 2\beta_1 \beta_2 X_E Y_E - 4\beta_1 \beta_2 X_E Y_E + 4\gamma_1 \gamma_2 X_E Y_E \\ &= (\beta_1 X_E - \beta_2 Y_E)^2 + 4\gamma_1 \gamma_2 X_E Y_E. \end{aligned}$$

Donc le point d'équilibre en question est un *nœud stable*.

En analysant de cette façon tous les points d'équilibres et les possibles orbites qui peuvent les relier, nous pouvons construire un portrait de phase *qualitatif* et obtenir nos conclusion sur l'évolution des deux espèces.

#### 4. Modèle Proie–Prédateur

Dans cette section nous considérons une deuxième application de la Théorie qualitative à un modèle d'évolution d'espèces. Encore une fois nous avons deux espèces, disons lièvres et renards, dont une est proie de la deuxième. Pour établir le modèle assumons que :

- (1) s'il n'y a pas de prédateurs, les proies suivent un modèle logistique, vu dans le §2, donc leur nombre  $x(t)$ , vérifie l'EDO :

$$\dot{x} = ax - bx^2,$$

avec  $a$  et  $b$  paramètres réels positifs ;

- (2) en absence de proies les prédateurs meurent, donc leur nombre  $y(t)$  doit décroître à zéro, un bon modèle est :

$$\dot{y} = -cy,$$

avec  $c$  paramètre réel positif.

- (3) les nombres de prédateurs augmente s'il y a beaucoup de proies "disponibles" et au même temps le nombre de proies diminue en présence de beaucoup de prédateurs.

Un bon modèle qui résume ces hypothèses est le suivant :

$$(VIII.4.1) \quad \begin{cases} \dot{x} &= ax - bx^2 - \alpha xy \\ \dot{y} &= -cy + \beta xy, \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux paramètres réels positifs qui décrivent l'interaction entre les proies et les prédateurs (le taux avec le quel les prédateurs mangent des proies à chaque rencontre et similaire pour les proies).

Comme nous avons déjà fait nous commençons notre analyse en déterminant les points d'équilibre du système d'EDO :

$$(x, y) = (0, 0), \quad (x, y) = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \text{ et } (x, y) = \left[\frac{c}{\beta}, \frac{b}{\alpha} \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right)\right],$$

ce dernier point doit être considéré seulement si son ordonnée est positive  $\frac{b}{\alpha} \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) > 0$  ; cette condition est vérifiée si et seulement si (rappelons que tous les paramètres sont réels positifs).

$$(VIII.4.2) \quad \frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}.$$

Considérons maintenant la caractère de chaque position d'équilibre pour pouvoir construire à la fin un portrait de phases globale.

**4.1. Étude de l'origine.** Le système linéaire associé au système (VIII.4.1) est (on rappelle que cela équivaut à ne garder que les termes au plus linéaires en  $x$  et  $y$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -cy, \end{cases}$$

les valeurs propres,  $\lambda_1 = a$  et  $\lambda_2 = -c$ , sont réelles, distinctes et de signe opposé, donc le point d'équilibre  $(0, 0)$  est une *selle*, quelle que soit la valeur de  $\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}$ .

**4.2. Étude du point**  $(x, y) = (\frac{a}{b}, 0)$ . On fait le changement des coordonnées

$$\begin{cases} x &= \frac{a}{b} + u \\ y &= v, \end{cases}$$

et le système linéaire associé au système (VIII.4.1) est (en gardant seulement les termes linéaires en  $u$  et  $v$ ) :

$$\begin{cases} \dot{u} &= -au - \frac{\alpha a}{b}v \\ \dot{v} &= \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) v. \end{cases}$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation du deuxième ordre, obtenue de  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$  avec  $A = \begin{pmatrix} -a & -\frac{\alpha a}{b} \\ 0 & \beta(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}) \end{pmatrix}$  :

$$\lambda^2 + \lambda \left[ a - \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \right] - a\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(VIII.4.3) \quad \lambda_{1,2} = \frac{\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) - a \pm \sqrt{\left[ \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) - a \right]^2 + 4a\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right)}}{2};$$

remarquons que le terme sous racine est toujours positif puisque il peut être écrit comme

$$\begin{aligned} \left[ \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) - a \right]^2 + 4a\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) &= \beta^2 \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right)^2 - 2a\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) + a^2 + 4a\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \\ &= \left[ \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) + a \right]^2. \end{aligned}$$

Nous distinguerons deux cas possibles : deux racines égales ou bien distinctes.

- (1) **Cas** :  $\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) + a \neq 0$ . Un simple calcul montre que les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -a,$$

elles sont réelles et distinctes,  $\lambda_1 = \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \neq -a = \lambda_2$ , leurs signes et positions relatives dépendent de la condition (VIII.4.2).

- Si  $a/b - c/\beta > 0$  les valeurs propres sont de signe opposé et donc la position d'équilibre est un *point selle*; voir Figure 10 pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(2 - x - y) \\ \dot{y} &= y(-1 + x). \end{cases}$$

- Si  $a/b - c/\beta < 0$  les valeurs propres sont du même signe et le point est un *nœud stable*; voir Figure 8 pour le choix des paramètres :

$$a = b = \alpha = 1 = \beta = 1 \quad \text{et} \quad c = 3.$$

Le vecteur propres associé à la valeur propre  $\lambda_2 = -a$  est  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$  et celui associé à  $\lambda_1$  est  $\mathbf{v}_2 = \left( -\frac{\alpha a}{b}, a + \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \right)$ .



- (2) **Cas :**  $\beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) + a = 0$  (**cas dégénéré**). Les deux valeurs propres coïncident et la formule pour les racines de l'équation du deuxième degré nous donne

$$\lambda_{1,2} = -a.$$

Un premier vecteur propre est  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ , on vérifie que  $\ker(A + a\mathbb{I})$  a dimension 1, on doit donc chercher (voir § 2.3.2) un deuxième vecteur,  $\mathbf{v}$ , linéairement indépendant de  $\mathbf{v}_1$  tel que :  $A\mathbf{v} = -a\mathbf{v} + \mathbf{v}_1$ , on peut vérifier que  $\mathbf{v} = (0, -b/(a\alpha))$  est un bon choix :

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{b}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{\alpha} \end{pmatrix} + \mathbf{v}_1 = -a \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b}{a\alpha} \end{pmatrix} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_1.$$

Donc le point d'équilibre est un nœud dégénéré du deuxième type. Voir Figure 9 pour un exemple de portrait de phase avec

$$a = b = \alpha = 1 = \beta = 1 \quad \text{et} \quad c = 2,$$

donc

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} = 1 - 2 < 0 \quad \text{et} \quad \beta \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) + a = 0.$$

Notez que la seule différence entre ce système et celui du cas précédent est le changement du paramètre  $c$  de la valeur 3 à la valeur 2.

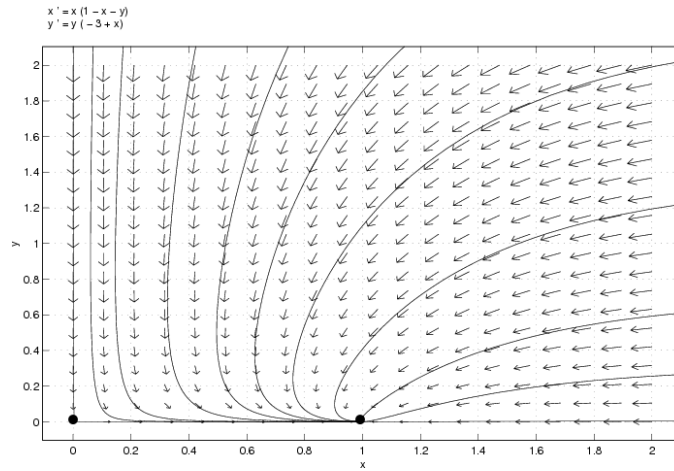


FIG. 8. Portrait de phase global pour le système :  $\dot{x} = x(1 - x - y)$   $\dot{y} = y(-3 + x)$ .

**4.3. Étude du point**  $(x, y) = \left[ \frac{c}{\beta}, \frac{b}{\alpha} \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) \right]$ . Ce point d'équilibre peut être considéré si et seulement si la condition (VIII.4.2) est vérifiée, de cette façon il correspond bien à un nombre positif d'individus de la population  $y$ , donc :

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} > 0.$$

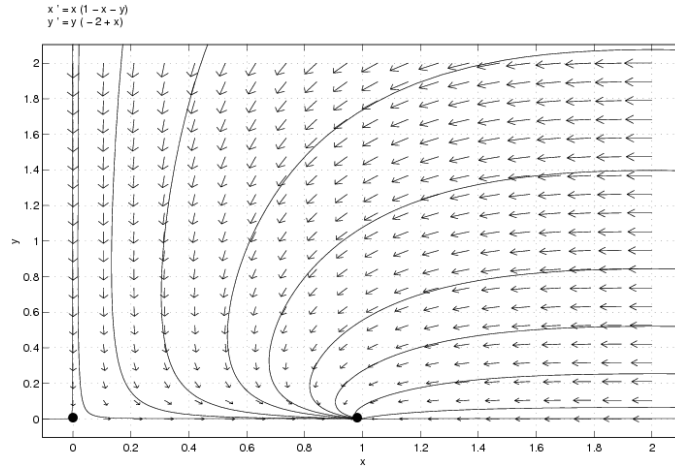


FIG. 9. Portrait de phase globale pour le système :  $\dot{x} = x(1 - x - y)$   $\dot{y} = y(-2 + x)$ .

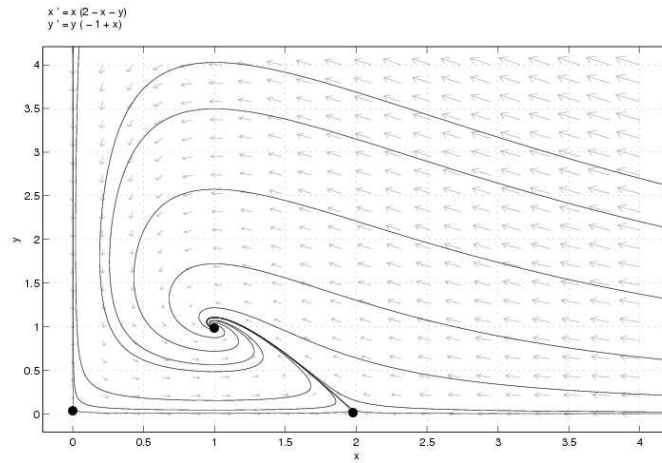


FIG. 10. Portrait de phase globale pour le système :  $\dot{x} = x(2 - x - y)$   $\dot{y} = y(-1 + x)$ .

Pour linéariser nous allons changer coordonnées :

$$\begin{cases} x &= \frac{c}{\beta} + u \\ y &= \frac{b}{\alpha} \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) + v, \end{cases}$$

et récrire l'EDO dans les nouvelles variables  $(u, v)$  (en ne gardant que les termes au plus linéaires) :

$$\begin{cases} \dot{u} &= -\frac{bc}{\beta}u - \frac{c\alpha}{\beta}v \\ \dot{v} &= \frac{b\beta}{\alpha} \left( \frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} \right) u. \end{cases}$$

Les vecteurs propres sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 + \frac{bc}{\beta}\lambda + cb\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) = 0,$$

donc

$$\lambda_{12} = -\frac{bc}{2\beta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right)}.$$

Puisque  $\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} > 0$  le terme dans la racine peut être négatif ou bien positif, il faut donc distinguer ces deux cas qui donnent lieu à des valeurs propres complexes ou réelles.

- (1) **cas :**  $\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) > 0$ . Les valeurs propres sont réelles, négatives et distinctes, en fait

$$\lambda_1 = -\frac{bc}{2\beta} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right)} < 0,$$

et puisque  $\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta} > 0$  nous avons  $\sqrt{\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right)} < \frac{bc}{\beta}$ , donc

$$\lambda_2 = -\frac{bc}{2\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right)} < 0.$$

Le point d'équilibre est donc un *nœud stable*. La Figure 11 représente cette situation pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= x\left(2 - \frac{3}{2}x - y\right) \\ \dot{y} &= y(-1 + x). \end{cases}$$

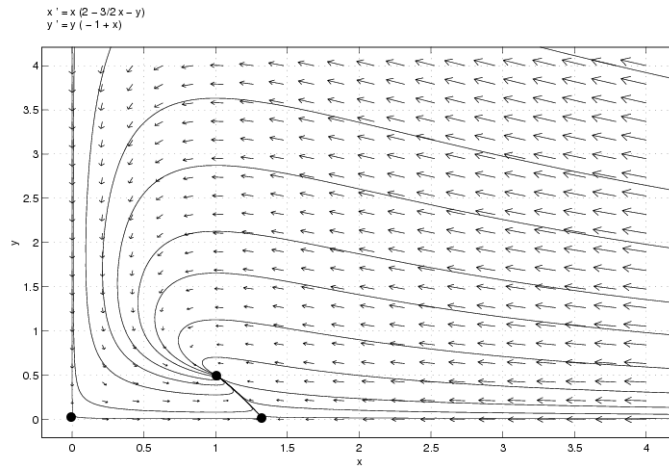


FIG. 11. Portrait de phase globale pour le système :  $\dot{x} = x\left(2 - \frac{3}{2}x - y\right)$   $\dot{y} = y(-1 + x)$ .

- (2) **cas** :  $\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) < 0$ . Les valeurs propres sont complexes conjuguées, avec parties réelles négatives et distinctes. La position d'équilibre est un *foyer stable*. La Figure 10 représente cette situation pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x) \end{cases}$$

- (3) **cas** :  $\left(\frac{bc}{\beta}\right)^2 - 4bc\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) = 0$  (**cas dégénéré**). Les valeurs propres sont réelles, négatives et coïncident (multiplicité algébrique égale à 2) :  $\lambda = -\frac{bc}{2\beta}$ . Comme vecteur propre associé on peut choisir :  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{c\alpha}{\beta} \\ -\frac{bc}{2\beta} \end{pmatrix}$ , et on peut vérifier que la dimension de l'espace associé à la valeur propre est 1 (multiplicité géométrique égal à un). Comme vu au § 2.3.2 il faut chercher un deuxième vecteur,  $\mathbf{v}$ , linéairement indépendant de  $\mathbf{v}_1$  tel que :  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{v}_1$ , où  $A = \begin{pmatrix} -\frac{bc}{\beta} & -\frac{c\alpha}{\beta} \\ \frac{b\beta}{\alpha}\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) & 0 \end{pmatrix}$ . On peut vérifier que  $\mathbf{v} = (0, -1)$  est un bon choix :

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{bc}{\beta} & -\frac{c\alpha}{\beta} \\ \frac{b\beta}{\alpha}\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c\alpha}{\beta} \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{bc}{2\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c\alpha}{\beta} \\ -\frac{bc}{2\beta} \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{v}_1.$$

Donc le point d'équilibre est un *nœud dégénéré du deuxième type*. Voir Figure 12 pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - 2x - y) \\ \dot{y} = y(-1 + x) \end{cases}$$

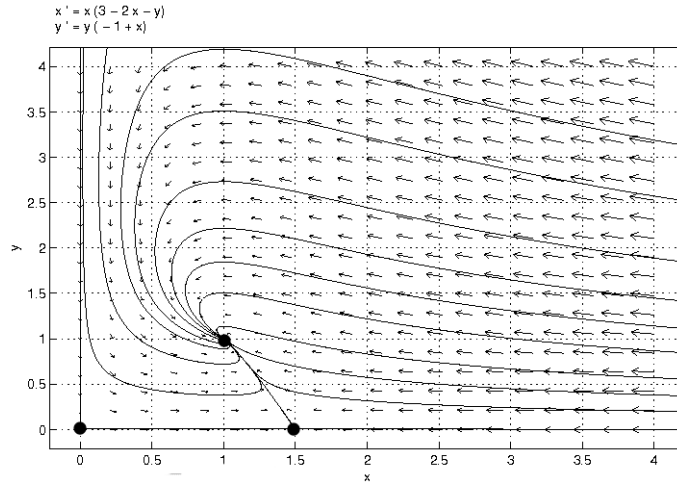


FIG. 12. Portrait de phase globale pour le système :  $\dot{x} = x(3 - 2x - y)$   $\dot{y} = y(-1 + x)$ .

Avant de conclure l'analyse locale des points d'équilibre et de passer à l'interprétation biologique, nous allons considérer un dernier cas dégénéré, c'est-à-dire  $a/b = c/\beta$ .

REMARQUE 4.1 (Étude du cas dégénéré  $\frac{a}{b} = \frac{c}{\beta}$ ). La stabilité de l'origine ne dépend pas de la valeur de  $\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}$ , et donc ce point d'équilibre ne change pas son caractère.

Si on revient en arrière à l'analyse faite pour  $(a/b, 0)$  on s'aperçoit que la linéarisation nous donne un nouveau système :

$$\begin{cases} \dot{u} &= -au - \frac{a\alpha}{b}v \\ \dot{v} &= 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire dans l'approximation linéaire la coordonnée  $v$  (et donc  $y$ ) ne change pas dans le temps. Les valeurs propres sont

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -a,$$

avec vecteurs propres

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a}{b} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nous sommes dans le cas considéré en § VII.2.4.1 où il y a une droite invariante des point d'équilibre, cette droite est déterminé par la direction du vecteur propre  $\mathbf{v}_2$ , et donc son équation cartésienne est :  $bx + \alpha y - a = 0$ . Cette situation est valable pour le système linéaire mais pas pour le système complet, en fait si on évalue l'EDO sur la droite en question (on remplace dans le système la relation entre  $x$  et  $y$  donnée par la droite) on trouve

$$\begin{cases} \dot{x} &= 0 \\ \dot{y} &= -\frac{b\beta}{\alpha} \left(x - \frac{a}{b}\right)^2, \end{cases}$$

donc  $y$  diminue, c'est-à-dire tout point sur la droite s'en éloigne puisque son ordonnée décroît. En particulier elle ne sera plus un ensemble des point d'équilibre.

Nous avons ici un phénomène générale pour les cas dégénérés : le caractère du point d'équilibre déterminé avec la linéarisation n'est pas le même du système complet. Son analyse nécessite donc d'autres moyens qui dépassent le niveau de ce cours.

Le dernier point d'équilibre à étudier est celui du § 4.3 qui maintenant devient  $(\frac{c}{\beta}, 0)$  et à cause de la relation  $\frac{a}{b} = \frac{c}{\beta}$  c'est la même chose que le cas qu'on vient de voir. La Figure 13 décrit ce cas pour le système

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y(-1 + x). \end{cases}$$

**4.4. Portrait de phase globale.** Nous pouvons finalement réunir les constructions locales pour essayer de décrire les différents portraits de phase globaux ; puisque cela va dépendre des valeurs des paramètres, et il y en a beaucoup, nous analyserons seulement les cas non dégénérés. Il suffit donc de distinguer deux cas selon le signe de  $\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}$ .

- (1)  $\frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$ . Le système présente deux seuls points d'équilibre,  $(0, 0)$  et  $(a/b, 0)$ .

Le premier est toujours un point selle avec l'axe de  $y$  attractif et l'axe de  $x$  répulsif, par contre le deuxième est toujours un nœud attracteur. Le système proie-prédateur a un seul possible scénario futur si au départ on a soit de proies que de prédateurs : les prédateur vont tous vers l'extinction et les proies vers leurs niveau de saturation. Si au départ il y avait seulement prédateurs alors ils irons vers leur extinction.

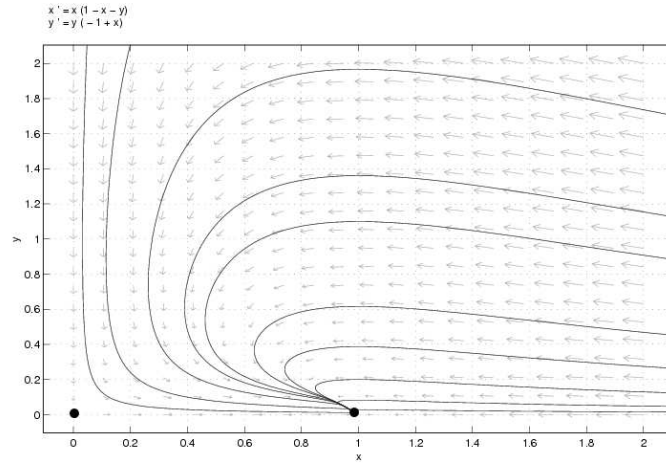


FIG. 13. Portrait de phase globale pour le système :  $\dot{x} = x(1-x-y)$   
 $\dot{y} = y(-1+x)$ .

- (2)  $\frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$ . Le système présente trois points d'équilibre,  $(0,0)$ ,  $(a/b, 0)$  et  $\left[\frac{c}{\beta}, \frac{b}{\alpha} \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{\beta}\right)\right]$ , le premier et le deuxième sont toujours des points selle, le troisième peut être un foyer stable ou bien un nœud attracteur. Si à l'instant initiale les deux espèces sont présentes, alors il y a une seule possibilité pour le futur : coexistence des deux espèces sur le troisième point d'équilibre.



## CHAPITRE IX

### ***Bibliographie.***

Les sujets traités dans ce cours peuvent être retrouvé dans beaucoup de bouquins *Classique de EDO*, nous proposons une liste (forcement incomplète) qui pourra aider l'étudiant à compléter sa preparation.

- V. Arnol'd : *Equations différentielles ordinaires*
- L. Pontriaguine : *Equations différentielles ordinaires*
- G. Sansone et R. Conti : *Non-linear differential equations*
- Z. Zhang : *Qualitative theory of differential equations*





## ANNEXE A

**“Tout ce que vous auriez toujours voulu savoir  
mais que vous n’avez jamais osé demander  
concernant l’analyse”**



Dans ce Chapitre final nous avons essayé de mettre tous les résultats utilisés ou rappelés dans les cours. Son but est donc de fournir un recueil, afin de compléter la première partie et d’avoir sous la main facilement et rapidement les résultats les plus importants utilisés. En conséquence le style ne sera pas trop formel, tout lecteur est invité à consulter un livre d’analyse/calcul pour avoir plus de détails et approfondir les sujets traités.

### 1. Le Principe d’induction

Voilà un outil très pratique pour démontrer des choses,

**THÉORÈME 1.1 (Principe d’Induction).** *Soit  $(\mathcal{P}_n)_{n \geq 1}$  une suite de propositions, dépendantes de l’indice entier positif  $n$ . Si*

- (1)  $\mathcal{P}_1$  est vrai (**hypothèse d’induction**);
- (2) pour tout  $n$  entier positif  $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$  (**induction**);

alors  $\mathcal{P}_n$  est vrai pour tout  $n$ .

**EXEMPLE 1.2.** *Soit  $h \geq -1$ , on veut montrer que pour tout  $n \geq 1$  on a :*  
 $(1+h)^n \geq 1+nh$ .

*On considère la famille de propositions :*

$$\mathcal{P}_n : (1+h)^n \geq 1+nh \text{ est vrai.}$$

*Pour  $n = 1$  on a  $(1+h)^1 - (1+1h) = 0$  et donc  $\mathcal{P}_1$  est vraie, si on suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie alors  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie, puisque :*

$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h$ ,  
où pour le premier passage on a utilisé  $\mathcal{P}_n$  et le fait que  $1+h \geq 0$ , le reste est simple algèbre. On peut donc conclure que pour tout  $n$  entier positif  $(1+h)^n \geq 1+nh$ .

## 2. Théorème de la Moyenne ou de Lagrange.

THÉORÈME 2.1 (Valeur Moyenne ou de Lagrange). Soit  $f(x)$  une fonction continue dans  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  et dérivable dans  $(a, b)$ . Alors il existe un point  $\xi \in (a, b)$  tel que :

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

## 3. Théorème de Schwartz ou de l'inversion de l'ordre de dérivation.

THÉORÈME 3.1 (Schwartz). Soit  $A \subset \mathbb{R}^k$  ouvert,  $f$  définie dans  $A$  et  $\mathbf{x}_0$  un point de  $A$ . Si les dérivées partielles mixtes

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f,$$

existent dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$  et sont continues en  $\mathbf{x}_0$ , alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(\mathbf{x}_0).$$

## 4. Normes et Distances.

Soit  $X$  un ensemble on appelle *distance* ou *métrique* une fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

- (d1) (positivité)  $d(x, y) \geq 0$  pour tout  $(x, y) \in X \times X$ ;  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .
- (d2) (symétrie)  $d(x, y) = d(y, x)$  pour tout  $(x, y) \in X \times X$ .
- (d3) (inégalité triangulaire)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  pour tout  $(x, y, z) \in X \times X \times X$ .

Si  $d$  est une distance pour l'ensemble  $X$ , on appellera le couple  $(X, d)$  *espace métrique*.

EXEMPLE 4.1 (Métriques pour  $\mathbb{R}^2$ ). Une distance (bien connue) dans le plan  $\mathbb{R}^2$  est la suivante : si deux points  $P_1$  et  $P_2$  ont coordonnées respectivement  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , alors on vérifie aisément que la fonction  $d(P_1, P_2)$ , définie par

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

est une distance sur  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire elle vérifie (d1), (d2) et (d3).

On peut vérifier que les fonctions :

$$d_1(P_1, P_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \quad \text{et} \quad d_2(P_1, P_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

sont aussi des distances pour  $\mathbb{R}^2$ . Les couples  $(\mathbb{R}^2, d)$ ,  $(\mathbb{R}^2, d_1)$  et  $(\mathbb{R}^2, d_2)$  sont tous des espaces métriques à priori distincts, mais on peut prouver que ces métriques sont équivalentes.

EXEMPLE 4.2 (Fonctions Continues et métrique de la convergence uniforme). Soit  $A \subset \mathbb{R}$  un ouvert et soit  $\mathcal{C}(A)$  l'ensemble des fonction continues et bornées de  $A$  à valeurs réelles. La fonction  $d : \mathcal{C}(A) \times \mathcal{C}(A) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$d(f, g) = \sup_{t \in A} |f(t) - g(t)|,$$

est une distance sur  $\mathcal{C}(A)$ .

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continue dans  $A \subset \mathbb{R}$ , alors par définition de valeur absolue :  $|f(t) - g(t)| \geq 0$  pour tout  $t \in A$ , d'où la première partie de (d1). Si  $f = g$  alors  $d(f, g) = 0$ , par contre si  $d(f, g) = 0$ , on obtient :

$$0 = d(f, g) \geq |f(t) - g(t)| \geq 0 \quad \forall t \in A,$$

c'est-à-dire  $f(t) = g(t)$  dans  $A$ .

Étant la propriété (d2) triviale, il nous reste à démontrer (d3). Pour tout  $f, g$  et  $h$  dans  $\mathcal{C}(A)$  et tout  $t \in A$  on a (propriété triangulaire de la valeur absolue) :

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)|,$$

mais (définition de sup)  $|f(t)| \leq \sup |f(t)|$ , donc

$$|f(t) - g(t)| \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Étant cette inégalité valable pour tout  $t \in A$ , on peut "passer au sup", et elle restera valable pour le sup aussi :

$$d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g).$$

Cette métrique est dite de la convergence uniforme ou du sup (supremum).

On va maintenant supposer que l'ensemble  $X$  ait plus de structure, par exemple qu'il soit un *espace vectoriel*<sup>1</sup> sur  $\mathbb{R}$ . Une application  $N : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *norme* si :

(n1) (positivité)  $N(x) \geq 0$  pour tout  $x \in X$ ;  $N(x) = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

(n2) (homogénéité)  $N(\alpha x) = |\alpha|N(x)$  pour tout  $x \in X$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(n3) (inégalité triangulaire)  $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$  pour tout  $(x, y) \in X \times X$ .

Le couple  $(X, N)$  est appelé *espace normé*; on indiquera souvent la norme par  $\|\cdot\|$  au lieu de  $N(\cdot)$ .

Dans un espace normé on peut introduire une distance  $d(x, y) = \|x - y\|$ , qui le rend un espace métrique. De plus un espace normé qui résulte complet<sup>2</sup> (comme espace métrique par rapport à la métrique induite de la norme) est appelé *espace de Banach*.

EXEMPLE 4.3 ( $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est de Banach). Soit  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  l'espace de fonctions bornées et continues de  $X$  (espace métrique) à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On va démontrer que avec la métrique de la convergence uniforme,  $d(f, g) = \sup_X |f(x) - g(x)|$ ,  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  c'est un espace métrique complet.

Soit, en effet,  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , alors pour tout  $x \in X$  la suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  est fondamentale<sup>3</sup> dans  $\mathbb{R}$  (espace complet) et donc la suite admet une limite appelée  $f(x)$ .

On va montrer que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$ ,  $f$  est bornée et continue, donc  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  est complet.

<sup>1</sup>Un espace vectoriel, aussi noté *espace linéaire*, sur le corps  $\mathbb{K}$ , est un ensemble (non vide),  $X$ , sur le quel on a définies une opération de *addition*,  $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ , et un *produit par scalaire*,  $X \times \mathbb{K} \ni (x, \alpha) \mapsto \alpha x \in X$ . Entre les opérations on a deux conditions de compatibilité :  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  et  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ .

<sup>2</sup>Toute suite fondamentale (ou de Cauchy) converge.

<sup>3</sup>Par définition, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n, m > N$  on a :  $d(f_n, f_m) < \epsilon$ , donc pour tout  $x \in X$  on a aussi :  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$ .

On a déjà remarqué que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n, m > N$  on a :  $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$  pour tout  $x \in X$ . On peut passer à la limite sur  $m \rightarrow \infty$  et de la convergence de  $(f_m(x))_{m \geq 0}$  on obtient :

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in X.$$

Mais alors on a  $d(f_n, f) \leq \epsilon$  si  $n > N$ . Puisque  $(f_n)_{n \geq 0}$  est bornée et la convergence est uniforme, on a aussi que  $f$  est bornée.

On fixe maintenant  $x_0 \in X$  et à l'aide de l'inégalité triangulaire on écrit :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|;$$

soit donc  $\epsilon > 0$ , il existe  $N > 0$  tel que si  $n > N$  alors :  $d(f_n, f) < \epsilon/3$ , et pour tout  $x \in X$  :  $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ . Cela nous permet d'écrire :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon/3 + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \epsilon/3,$$

mais  $f_n$  est continue pour tout  $n$ , donc (avec le même  $\epsilon$  utilisé avant) il existe  $\delta > 0$  tel que si  $d_X(x, x_0) < \delta$  (métrique sur  $X$ ), alors :  $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3$ . D'où finalement  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ , pour tout  $\epsilon > 0$ , si  $x$  et  $x_0$  sont assez proches. Puisque  $x_0$  est arbitraire on a la thèse.

La norme qui induit la métrique de la convergence uniforme sera dite *norme uniforme* et notée avec  $\|\cdot\|_\infty$ .

## 5. Réduction de l'équation d'une conique en forme normale

On se donne un repère orthonormale avec coordonnées  $(x, y)$ , un *conique* est l'ensemble des points  $\mathcal{C}$  tels que :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

pour des coefficients réels  $(a_{ij})$ . Le choix (apparemment bizarre) des notations est du au fait que la classification des coniques du plan est étroitement lié à la Théorie des Formes Quadratiques, en particulier si  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ , alors on pourra écrire la conique comme  $(Q\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , où  $\mathbf{x} = (x, y, 1)$ .

Sous cette forme n'est pas facile comprendre le type de la conique : cercle, ellipse, parabole ou hyperbole. Mais la Théorie de Formes quadratiques va nous aider.

La première étape est de rendre la forme quadratique *canonique*, c'est-à-dire sans termes mixtes  $xy$ , on effectue donc une rotation de repère d'angle  $\theta$  et on passe à nouvelles coordonnées  $(x', y')$  :

$$\begin{cases} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases},$$

un choix approprié de  $\theta$  permet d'écrire dans ces nouvelles coordonnées l'équation de  $\mathcal{C}$  dans la forme suivante :

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0,$$

pour des nouveaux paramètres réels  $\lambda_1, \lambda_2, a'_{13}$  et  $a'_{23}$ . Nous observons que cela revient à chercher les valeurs propres,  $\lambda_1, \lambda_2$ , et les vecteurs propres de la matrice  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

Effectuons maintenant un changement des coordonnées (translation)

$$x' = x'_0 + X \quad \text{et} \quad y' = y'_0 + Y,$$

avec  $(x'_0, y'_0)$  inconnus à déterminer pour simplifier encore la conique. Après substitution l'équation de la conique dévient

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(a'_{13} + \lambda_1 x'_0)X + 2(a'_{23} + \lambda_2 y'_0)Y + \gamma = 0,$$

où  $\gamma = \lambda_1(x'_0)^2 + \lambda_2(y'_0)^2 + 2a'_{13}x'_0 + 2a'_{23}y'_0 + a_{33}$ . Il faut distinguer à ce moment plusieurs cas :

- (1)  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ , on peut donc univoquement déterminer  $(x'_0, y'_0)$  pour éliminer les termes linéaires :

$$a'_{13} + \lambda_1 x'_0 = 0 \quad \text{et} \quad a'_{23} + \lambda_2 y'_0 = 0$$

et la conique s'écrit comme :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \gamma = 0,$$

et elle représente une ellipse ou bien une hyperbole .

- (2) Un des  $\lambda_j$  est égal à zéro. La translation n'est pas complètement définie, mais en utilisant la formule pour  $\gamma$  on peut toujours se ramener à une parabole (même dégénérée en deux droites).